Решение заданий заключительного этапа Волгоградской олимпиады школьников "Политехник"

Математика **9 касс**

1. $\sqrt{24}\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)-4\sqrt{45}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\left(\sqrt{5}-1\right)-4\cdot 3\sqrt{5}=12\sqrt{5}-12-12\sqrt{5}=-12$

Ответ: -12

2. Все три числа – неотрицательные числа. Обозначим их так: $x\ge y\ge z\ge 0$. Тогда $x-z\ge y-z\ge 0$, откуда $(x-z)^2\ge (y-z)^2$. По условию $(x-z)^2=y,\ (y-z)^2=x$. Итак, с одной стороны, $x\ge y$, а с другой стороны $y\ge x$, значит $x=y$. Тогда $z=0,\ x=x^2$, то есть $x=0$ или $x=1$.

Ответ: либо все три числа равны нулю, либо одно из них равно нулю, а два других – единице.

3. Так как разрешается менять местами лишь фишки, находящиеся через одну, то фишка, находящаяся на чётном месте, может оказаться лишь на чётном месте, поэтому сотая фишка не может стать первой.

Ответ: не удастся.

4. Известно, что $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ или $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$. Последнее неравенство перепишем в виде: $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, при $x>0,\ y>0$. Полагая $x=a+\frac{1}{a},\ y=b+\frac{1}{b}$, получим:

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\ge\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

Выражение $\frac{1}{ab}$ достигает наименьшего значения, когда (ab) достигает наибольшего значения. Так как $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{ab}\ge 4\Rightarrow 1+\frac{1}{ab}\ge 5$. Отсюда: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\ge\frac{25}{2}$, что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a=b=\frac{1}{2}$.

5. Пусть x, y, z - стороны треугольника и $x\le y\le z$. Тогда $\begin{cases}x+y+z=60\\ 4x+z=71\end{cases}$

1) Если $z=2x$, то $6x=71$ и $x=\frac{71}{6},\ z=\frac{71}{3},\ y=\frac{147}{6}\ \Rightarrow\ y>z$, что противоречит предположению.

2) Если $z=2y$, то $x+y\le 2y=z$, то есть не выполняется неравенство $x+y>z$.

3) Если $y=2x$, то $3x+z=60$ и $4x+z=71$. Отсюда $x=11,\ z=27,\ y=22$.

Ответ: 11; 22; 27.

6. 1) Имеем: $x\left(x^2+10x-m\right)=0,\ \ x=0$ - корень уравнения при любом значении m.

2) Рассмотрим уравнение $x^2+10x-m=0$. Если D=0, то оно имеет один кратный корень, а исходное уравнение – 2 корня. D=25+m=0, m=-25.

Если m=0, то $x^2+10x=0,\ x=0,\ x=-10$, то есть при m=0 исходное уравнение имеет два различных корня.

Ответ: m = 0; m = -25

7. Обозначим протяжённость подъёмов через x, а протяжённость спусков через y. Ровное место можно не учитывать, так как на нём скорости деда и внука одинаковы. Тогда время деда равно $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}$, а время внука равно $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}$.

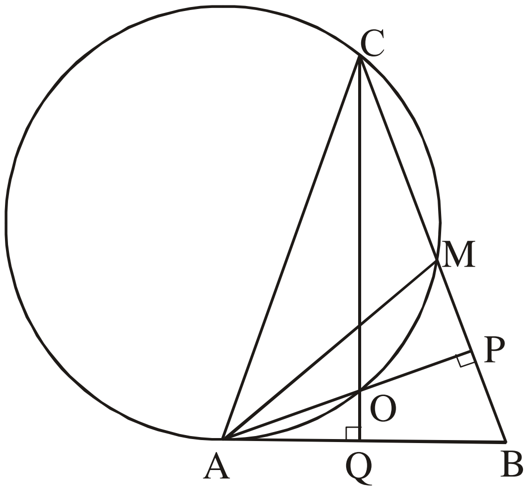
а) Пусть внук вернулся раньше, то есть $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}>\frac{x}{4}+\frac{y}{20}$. Тогда $9y>10x \Rightarrow y>x$, то есть протяжённость подъёмов меньше чем спусков.

б) Пусть дед вернулся раньше, то есть $9y<10x$. При этом может быть что угодно: и $y<x$ (например, $y=8,\ x=9$), и $y=x$ (например, $y=9,\ x=9$), и $y>x$ (например, $y=11,\ x=10$). В этом случае отец не может определить, протяжённость чего больше – спусков или подъёмов.

Ответ: а) может (больше спусков);
б) не может.

8. Дано: $AC=CB,\ CM=MB,\ AP\perp BC,\ CQ\perp AB.$

Найти: углы треугольника ABC.



$\Delta APB: \angle PAB=\frac{\pi}{2}-\angle CBQ.$

$\Delta QCB: \angle QCB=\frac{\pi}{2}-\angle CBQ$

Следовательно, $\angle PAB=\angle QCB$.

С другой стороны, вписанные в окружность углы MAP и QCB опираются на одну и ту же дугу OM, поэтому они тоже равны.

Итак:

$\angle BAM=\angle BAP+\angle MAP=2\angle QCB=\angle ACB$.

Следовательно, $\Delta ABC\sim\Delta MBA$. Отсюда:

$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{MB}=\frac{2AB}{AC}$ или $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Delta AQC: \cos\angle CAQ=\frac{AQ}{AC}=\frac{AB}{2AC}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\angle BAC=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\Delta ABC: \angle ACB=\pi-2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\angle A=\angle B=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4};\ \angle C=\pi-2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$