Решение заданий заключительного этапа
Волгоградской олимпиады школьников “Политехник”

Математика **10 касс**

1. $7+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+2\right)^2$; $12-6\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-3\right)^2$.

$$\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-3\right|=2+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=5$$

Ответ: 5.

2. Предположим, что нашлись два натуральных числа x и y, такие, что $x+y=201$, а xy делится на 201. Так как 201=3·67, то одно из чисел, для определённости x, делится на 3, но тогда и y=201-x делится на 3. Аналогично, x и y делятся на 67, то есть каждое из них не меньше 3·67=201, но тогда $x+y>201$, что противоречит предположению. Противоречие доказывает утверждение.

3. Имеем: $\sin 2x=-0.5 \Rightarrow 2x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$. Наибольший отрицательный корень $x=-\dfrac{\pi}{12}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{12}$ **(или -15°)**

4. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 89 монет. Каждым следующим ходом, если второй игрок берёт x монет, то первый игрок должен взять 101-x монет (он всегда может это сделать, так как если x – чётное число от 2 до 100, то (101-x) – нечётное число от 1 до 99). Так как 2009=101·19+89+1, то через 19 таких «ответов» после хода первого игрока на столе останется 1 монета и второй игрок не сможет сделать ход, то есть проиграет.

Ответ: выигрывает первый игрок.

5. Пусть $a\le b\le c\le d\le e$ - данные отрезки. Предположим, что все треугольники, составленные из этих отрезков, не остроугольные. Тогда $c^2\ge a^2+b^2,\ d^2\ge b^2+c^2,\ e^2\ge c^2+d^2$, откуда

$c^2+d^2+e^2\ge a^2+2b^2+2c^2+d^2$ или

$e^2\ge a^2+2b^2+c^2=\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)\ge a^2+b^2+2bc\ge a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, откуда $e\ge a+b$.

Значит из отрезков a,b,e нельзя составить треугольник, что противоречит условию задачи. Противоречие доказывает утверждение.

6. Вычтем из второго равенства первое: $2xy=14-2(1+a)\Rightarrow y=\dfrac{7-(1+a)}{x}=\dfrac{6-a}{x}$. Подставим найденное y в первое равенство: $x^2+\dfrac{(6-a)^2}{x^2}=2(1+a)\Rightarrow x^4-2(1+a)x^2+(6-a)^2=0$. Пусть $x^2=z$.

Тогда $z^2-2(1+a)z+(6-a)^2=0$. Исходная система имеет ровно 2 решения, если $D=0$ и $1+a>0$, так как тогда $z=1+a>0$ и $x=\pm\sqrt{z}$.

$$D=(1+a)^2-(6-a)^2=(1+a-6+a)(1+a+6-a)=7(2a-5),\ D=0\Rightarrow 2a-5=0\Rightarrow a=\frac{5}{2},$$

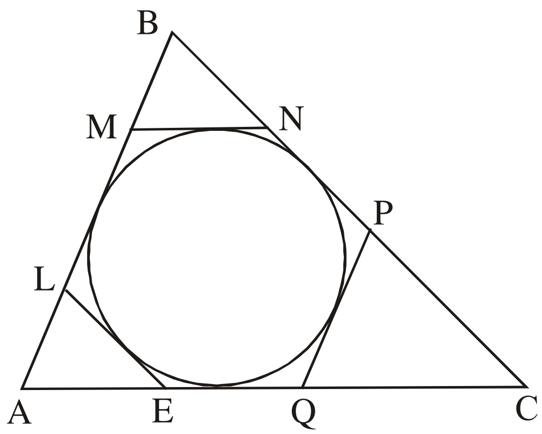
$$1+a=1+\frac{5}{2}>0.$$

Ответ: $\dfrac{5}{2}$.

7. Пусть x – количество правильно решённых задач, y – неправильно решённых задач. Тогда $x+y$ количество задач, которые ученик брался решать. Из условия задачи следует, что $8x-5y=13$, или $8(x+y)=13(1+y)$. Отсюда следует, что число $x+y$ делится на 13. С другой стороны, из условия следует, что $x+y\le 20$. Следовательно, $x+y=13$.

Ответ: 13.

8. Дано: r – радиус окружности, вписанной в ΔABC, $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AB$, $LE \parallel BC$, r_1, r_2, r_3 - радиусы окружностей, вписанных в треугольники *MBN, QPC, ALE* соответственно. Доказать, что $r_1+r_2+r_3=r$.



Пусть p – периметр ΔABC, p_1 - периметр ΔMBN, p_2 - периметр ΔQPC, p_3 -периметр ΔALE.

Тогда $p=AB+BC+AC$, $p_1=BM+BN+MN$,

$p_2=PC+QC+PQ$, $p_3=AE+AL+LE$.

Так как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны по длине,

то $p_1+p_2+p_3=p$ или $\frac{p_1}{p}+\frac{p_2}{p}+\frac{p_3}{p}=1$.

Так как $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, $\Delta QPC \sim \Delta ABC$, $ALE \sim \Delta ABC$,

То $\frac{p_1}{p}=\frac{r_1}{r}$, $\frac{p_2}{p}=\frac{r_2}{r}$, $\frac{p_3}{p}=\frac{r_3}{r}$. Отсюда $\frac{r_1}{r}+\frac{r_2}{r}+\frac{r_3}{r}=\frac{p_1}{p}+\frac{p_2}{p}+\frac{p_3}{p}=1$, то есть

$r_1+r_2+r_3=r$, что и требовалось доказать.