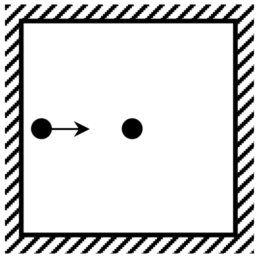
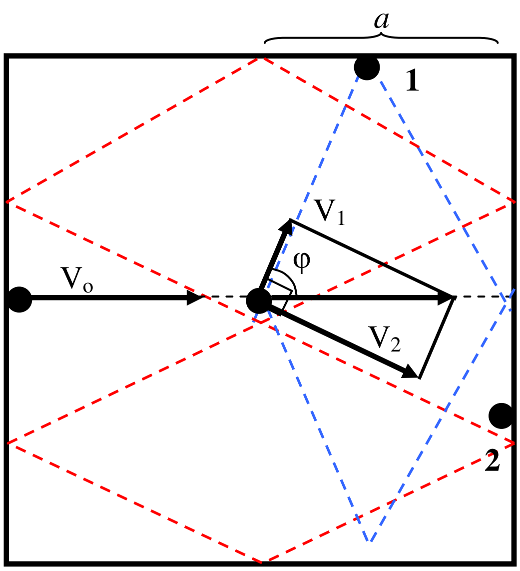


1. В центре квадратного бильярдного стола со стороной 2 м находится шар. От борта, по кратчайшему расстоянию к нему, движется со скоростью 1 м/с такой же шар. После соударения он отклоняется на угол $\varphi = \mathrm{arctg}2$ от первоначальной траектории. Найти время до их следующего соударения. Все удары абсолютно упругие. Трением пренебречь.

Решение



Поскольку из закона сохранения импульса и энергии выражение $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\Theta$ равно $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$ только при cos 90° = 0.

Угол разлета шаров 90°.

Поскольку α = arctg2, шар попадает в точку $\frac{a}{2}$ от вершины.

$V_0^2 = V_1^2 + V_2^2$.

Из тригонометрии следует, что $|V_1| = \frac{|V_2|}{2}$.

$V_1 = V_o \cdot \cos\alpha$.

Соударение произойдет в центре стола после 8 прохождений шара 2 и 4 прохождений шара 1, поскольку $V_2 = 2V_1$. Подставим значение угла α, получим время $t = \frac{S_{общ}}{V_1} = \frac{4a}{V_o \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{4 \cdot 1}{V_o \cdot 0{,}4} = 10$ с.

Или, сделав следующие преобразования:

$$\frac{\sin^2\alpha}{4} = 1 - \sin^2\alpha;\ 5\sin\alpha = 4;\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

получим аналогичный результат $t = \frac{4a}{V_o \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = 10$ с.

Ответ: 10 с.

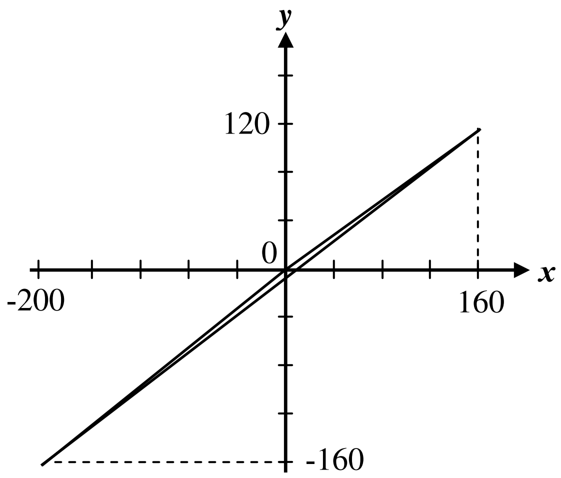
2. Вдоль шоссе для создания лесополосы выделен участок, координаты которого в декартовой системе удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x \ge 4y, \\ 4x \ge 5y, \\ 7x - 9y \le 40. \end{cases}$$

В каждой точке (x, y) с целыми координатами этого участка предполагается посадить дерево. Определите количество деревьев, которое потребуется для этого.

Решение

Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе, то получим треугольник с вершинами O (0; 0), A (-200; -160), B (160; 120).



Таким образом, становится очевидным, что решить задачу непосредственным подсчетом числа точек с целыми координатами, попавшими в область, практически невозможно. Выберем другой путь.

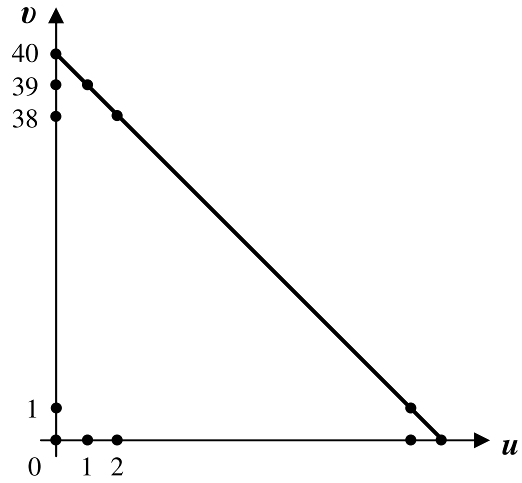
Введем новые переменные u и υ, положив $\begin{cases} u = 3x - 4y, \\ \upsilon = 4x - 5y. \end{cases}$

Решив эту систему относительно x и y, получаем $\begin{cases} x = 4\upsilon - 5u, \\ y = 3\upsilon - 4u. \end{cases}$

Заметим, что при указанных преобразованиях каждой паре целых чисел (x, y) соответствует пара целых чисел (u, υ) и наоборот, каждой паре целых чисел (u, υ) отвечает пара целых чисел (x, y). В новых координатах u, υ система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} u \ge 0, \\ \upsilon \ge 0, \\ u + \upsilon \le 40. \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти количество пар целых чисел (u, υ), удовлетворяющих последней системе. Легко видеть, что эта система в плоскости $Ou\upsilon$ определяет треугольник, изображенный на рисунке:



Количество точек с целыми координатами, лежащими внутри, а также на границе треугольника, найдем, используя формулу для суммы *n* членов арифметической прогрессии. В результате получим:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 40 + 41 = \frac{1+41}{2} \cdot 41 = 861.$$

Ответ: 861.

3. Температура внутри холодильной камеры, работающей по идеальному циклу, поддерживается постоянно (-23 °С). Через ее стенки каждый час проникает внутрь 10 кДж тепла. Какое количество энергии потребляет холодильник за сутки? Температура в комнате 27°С.

Решение

Коэффициент полезного действия машины, работающей по идеальному циклу:

$\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$; $\eta = \dfrac{A}{Q_1}$; Q_2 – количество теплоты, отбираемое у холодильной камеры.

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2 \cdot \eta}{A};$$

$$A = \frac{Q_2 (T_1 - T_2)}{T_1 \left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)} = \frac{Q_2 (T_1 - T_2)}{T_2} = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = 10^4 \cdot \left(\frac{320}{250} - 1\right) = 0{,}2 \cdot 10^4 \text{ Дж за час.}$$

За сутки $Q_{общ} = 24 \cdot 0{,}2 \cdot 10^4 = 4{,}8 \cdot 10^4$ Дж.

Ответ: 48 кДж.

4. В трех сосудах объемами 1 л, 2 л и 3 л находятся газы: водород, азот и воздух под давлениями 1 атм, 2 атм и 3 атм соответственно. Эти сосуды соединяют между собой трубками, объемами которых можно пренебречь. Найти установившееся давление.

Решение

Уравнение состояния газов до соединения имеет вид:

$P_i \cdot V_i = \nu_i \cdot R \cdot T$, где $i = 1, 2, 3$.

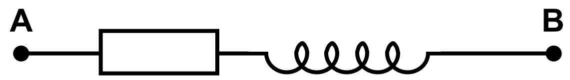
После соединения: $P_{об}(V_1+V_2+V_3) = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)\cdot R\cdot T$.

Решая относительно $P_{об}$, имеем:

$$P_{об} = \frac{P_1 \cdot V_1 + P_2 \cdot V_2 + P_3 \cdot V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{1+4+9}{6} = 2\frac{1}{3} \approx 2{,}33 \text{ Па}.$$

Ответ: 2,33 Па.

5. Определить разность потенциалов между точками A и B в тот момент, когда на участке цепи протекает ток 1 А. Скорость изменения тока 4 А/с. Сопротивление 2 Ом, индуктивность катушки 0,2 Гн.



Решение

Воспользуемся уравнением закона Ома для участка неоднородной цепи:

$I \cdot R = \Delta\varphi + \varepsilon = \Delta\varphi - L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, поскольку скорость изменения тока со знаком «+»,

т.е. ток нарастает, имеем $\varepsilon = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$.

Найдем $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = I \cdot R + L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 1 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 4 = 2{,}8 \text{ В}.$$

Ответ: 2,8 В.

6. Вследствие радиоактивного распада уран $_{92}U^{238}$ превращается в свинец $_{82}Pb^{206}$. Сколько α и β-превращений он при этом испытывает?

Решение

При k α-превращений и l β-превращений массовое число уменьшится в $4k$, а зарядовое число $(2k - l)$.

$32 = 4k$;

$10 = 2k - l$;

для α-превращений: $k = 8$;

для β-превращений: $l = 6$.

Ответ: 8 и 6.