1. Некий автор, читая свой учебник, заметил, что в предложении: «Отсечь 9 см на левой стороне угла в 60°, а на правой … и вычислить расстояние между полученными таким образом точками» - на месте проставленных нами точек имеется опечатка: наборщик увеличил число сантиметров, указанных в рукописи, на единицу. Конечно, наборщик и не подумал изменить ответ, напечатанный в конце учебника. Несмотря на это, опечатка не привела к ошибке. Какое число набрал наборщик в задаче?

Решение

Обозначим искомое число через x. Тогда число, указанное в рукописи будет равно $(x-1)$. Из того, что опечатка не повлияла на ответ, следует, что расстояния между полученными точками в обоих случаях одинаковы. Вычислим квадраты этих расстояний по теореме косинусов в образовавшихся треугольниках и приравняем их. Из полученного равенства

$$9^2+x^2-2\cdot 9\cdot x\cdot\frac{1}{2}=9^2+(x-1)^2-2\cdot 9\cdot(x-1)\cdot\frac{1}{2}$$

Найдём $x=5$.

Ответ: 5.

2. Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение всех цифр которого равно 6552. Докажите, что барон ошибся.

Доказательство

Разложим число 6552 на простые множители:

$$6552=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13.$$

Число 13 простое, его нельзя представить в виде произведения однозначных множителей, и само оно не цифра, значит барон ошибся, **что и требовалось доказать.**

3. Сумма двенадцати чисел равна нулю и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма четвёртых степеней этих чисел?

Решение

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ - искомые числа. Тогда по условию $x_1+x_2+\ldots+x_{12}=0$ и $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{11}x_{12}=0$.

Имеем: $(x_1+x_2+\ldots+x_{12})^2=\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{12}^2\right)+2\left(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{11}x_{12}\right)$.

Отсюда $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{12}^2=0$, то есть $x_1=x_2=\ldots=x_{12}=0$, а значит и сумма четвёртых степеней этих чисел равна нулю.

Ответ: 0.

4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c не превосходящих 1, выполнено неравенство:

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}<2.$$

Доказательство

Выражение, стоящее в левой части неравенства, симметрично относительно a, b, c, поэтому, не нарушая общности, будем считать, что $0<a\le b\le c\le 1$.

Из того, что $(1-a)(1-b)\ge 0$ следует, что $a+b\le 1+ab<1+2ab$. Следовательно, $a+b+c\le a+b+1<2+2ab$.

Поскольку $1+ab\le 1+ac\le 1+bc$, то

$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\le\frac{a+b+c}{1+ab}<\frac{2(1+ab)}{1+ab}=2$, **что и требовалось доказать.**

5. Найти сумму всех трёхзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 1.

Решение

101 – первое трёхзначное число, которое при делении на 5 даёт остаток 1, а 996 – последнее трёхзначное число, которое при делении на 5 даёт остаток 1. Следовательно, нужно найти сумму членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=101$, $a_n=996$, $d=5$. Найдём число членов n: $101+5(n-1)=996$. Отсюда $n=180$. Теперь вычислим искомую сумму: $S_{180}=\frac{a_1+a_{180}}{2}\cdot 180=98730$.

Ответ: 98730.

6. Какое из чисел больше: $\frac{23^{1981}+1}{23^{1982}+1}$ или $\frac{23^{1982}+1}{23^{1983}+1}$?

Решение

Пусть $n=23^{1981}$, A – первое число, B – второе число. Тогда $A=\frac{n+1}{23n+1}$, $B=\frac{23n+1}{23^2n+1}$. Рассмотрим отношение этих чисел: $\frac{A}{B}=\frac{n+1}{23n+1}\cdot\frac{23^2n+1}{23n+1}=\frac{(23n)^2+(23^2+1)n+1}{(23n)^2+2\cdot 23n+1}$. Так как $23^2+1>2\cdot 23$, то числитель больше знаменателя. Следовательно, $\frac{A}{B}>1$, то есть $A>B$.

Ответ: $\frac{23^{1981}+1}{23^{1982}+1}>\frac{23^{1982}+1}{23^{1983}+1}$.

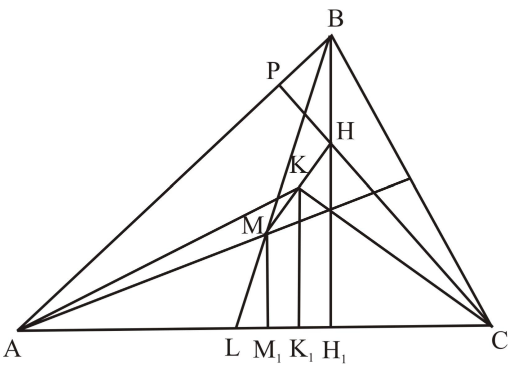
7. Школьник купил авторучку, книгу, портфель и футбольный мяч. Если бы эти предметы стоили соответственно в 12, 6, 4 и 3 раза дешевле, то он заплатил бы 10000 рублей. А если бы они стоили соответственно в 12, 15, 20 и 30 раз дешевле, то он заплатил бы 5000рублей. Что дороже: авторучка или портфель?

Решение

Пусть x, y, z, t – увеличенные в 60 раз цены авторучки, книги, портфеля и мяча. Будем измерять стоимость покупки в десятках тысяч рублей. Тогда из первого условия следует: $5x+10y+15z+20t=60$, или $x+2y+3z+4t=12$ (1), а из второго условия: $5x+4y+3z+2t=30$ (2). Складывая эти равенства, получим: $x+y+z+t=7$. Отсюда найдём: $x=7-y-z-t$, $t=7-x-y-z$. Подставляя это в (1) и (2) соответственно, получим: $y+2z+3t=5$ (3), $3x+2y+z=16$ (4). Из (3): $y=5-2z-3t$ (5), а из (4): $2y=16-z-3x$ (6). Подставляя (5) в (6) найдём: $3x=6+3z+6t$. Отсюда следует, что $x>z$.

Ответ: авторучка дороже портфеля.

8. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы – в точке M. Точка K - середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB=18\sqrt{2}$, $CH=12\sqrt{2}$, $\angle BAC=45^\circ$.



Решение

Из того, что высоты треугольника пересекаются следует, что точка их пересечения лежит внутри треугольника. Пусть CP – высота, а BL– медиана треугольника ABC. Проведём перпендикуляры MM_1, KK_1, HH_1 к основанию AC.

$\Delta APC : \angle APC = 90^\circ$, $\angle PAC = \angle PCA = 45^\circ$.

$\Delta HH_1C : \angle HH_1C = 90^\circ, \angle H_1CH = \angle H_1HC = 45^\circ, HH_1 = CH_1 = CH \cdot \sin 45^\circ = 12.$

$\Delta BH_1A : AH_1 = BH_1 = AB \cdot \sin 45^\circ = 18.$

Из подобия треугольников BH_1L и MM_1L следует: $\frac{BH_1}{MM_1} = \frac{BL}{ML} = \frac{3}{1}$ (по свойству медиан треугольника). Отсюда $MM_1 = \frac{1}{3} BH_1 = 6$. KK_1 – средняя линия трапеции MHH_1M_1, поэтому $KK_1 = \frac{MM_1 + HH_1}{2} = 9$.

$AC = AH_1 + H_1C = 30.$ $S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9 = 135$.

Ответ: 135