1. Пусть $S = a + b + c$, $T = ab + ac + bc$, где a, b, c – длины сторон треугольника. Доказать, что $3T \le S^2 < 4T$.

Доказательство

Сложив очевидные неравенства $2ab \le a^2 + b^2$, $2ac \le a^2 + c^2$, $2bc \le b^2 + c^2$ получим $ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2$. Если прибавить к обеим частям последнего неравенства $2T = 2(ab + ac + bc)$, то получим неравенство:

$$3T \le S^2 \qquad (1)$$

Из того, что a, b, c – длины сторон треугольника, справедливы неравенства: $|a - c| < b,\ |a - b| < c,\ |b - c| < a$. Возведя эти неравенства в квадрат и складывая вновь полученные неравенства, получим (после не сложных преобразований) неравенство $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ac + ab + bc)$. Если теперь прибавить к обеим частям полученного неравенства $2T = 2(ab + ac + bc)$, то получим неравенство:

$$S^2 < 4T \qquad (2).$$

Из (1) и (2) следует: $3T \le S^2 < 4T$, **что и требовалось доказать.**

2. Решить уравнение: $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0$.

Решение

Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$\left(x^2 + 3x\right)^2 - 4\left(x^2 + 3x\right) + 3 = 0.$$

Полагая $x^2 + 3x = t$, придём к уравнению: $t^2 - 4t + 3 = 0$. Корни уравнения $t_1 = 1,\ t_2 = 3$. Теперь имеем:

$$1)\ x^2 + 3x = 1,\quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2)\ x^2 + 3x = 3,\quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},\quad x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

3. Доказать, что положительный корень уравнения $x^5 + x = 10$ является иррациональным числом.

Доказательство

При $x > 0$ левая часть уравнения возрастает с возрастанием x, причём при $x = 1{,}5$ она меньше 10, а при $x = 1{,}6$ она больше 10. Следовательно, корень уравнения лежит внутри интервала $(1{,}5; 1{,}6)$. Предположим, что положительный корень уравнения есть рациональное число, то есть представимо в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p, q -$ натуральные числа. Тогда справедливо равенство: $\left(\frac{p}{q}\right)^5 + \frac{p}{q} = 10$. Отсюда следует, что $p\left(p^4 + q^4\right) = 10q^5$, то есть p является делителем числа 10. Следовательно, p есть одно из чисел 1, 2, 5, 10. Однако, ни одна из дробей с числителем 1, 2, 5, 10 не попадает в интервал $(1{,}5;1{,}6)$. Значит, положительный корень данного уравнения не может быть рациональным числом, **что и требовалось доказать.**

4. Решить в целых числах уравнение $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Решение

Пусть пара чисел $x, y \in Z$ удовлетворяет уравнению, тогда:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy, \text{ то есть } (x+y)^2 = xy(xy+1).$$

Если $xy > 0$, то $xy + 1 > \sqrt{xy(xy+1)} > xy$. В этом случае число $|x+y| = \sqrt{xy(xy+1)}$ лежит между двумя последовательными целыми числами xy и $xy + 1$, а значит, не может быть целым.

Аналогично, если $xy < -1$, то $-xy - 1 < \sqrt{xy(xy+1)} < -xy$, а значит, число $|x+y|$ не может быть целым. Итак, либо $xy = 0$, либо $xy = -1$. В обоих случаях уравнение равносильно равенству $x + y = 0$. Поэтому либо $x = y = 0$, либо $x = -y = \pm 1$ соответственно.

Ответ: $(0;0), (1;-1), (-1;1)$

5. Доказать, что для углов α, β, γ любого треугольника справедливо неравенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$. Определить, когда достигается равенство.

Доказательство

Имеем:

$$4\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - \frac{3}{4}\right) = 4\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2} - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 2\cos 2\alpha + 2\cos 2\beta + 2\cos 2\gamma + 3 = 4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 4\cos^2(\alpha+\beta) + 1 =$$

$$= (2\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))^2 + 1 - \cos^2(\alpha-\beta) \geq 0$$

Отсюда следует, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$, **что и требовалось доказать.**

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\cos(\alpha-\beta) = 1,\ \cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$, то есть когда $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{1-a}\left(2-\cos x+\sin\frac{x}{2}\right)=2$ имеет решение.

Решение

Основание логарифма $1-a$ должно быть положительно и не может быть равно единице, поэтому $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ (1). Для таких значений a перепишем исходное уравнение в виде: $2-\cos x+\sin\frac{x}{2}=(1-a)^2$ или $2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+1=1-2a+a^2$. Пусть $y=\sin\frac{x}{2}$, тогда $2y^2+y+2a-a^2=0$ $(*)$. Это уравнение имеет решение, если $D(a)=1+8a^2-16a\geq 0$.Это неравенство справедливо, если $a\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{14}}{4};\infty\right)$. Учитывая (1): $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$ (2).

Заметим, что исходное уравнение имеет решение в том и только том случае, когда среди корней уравнения (*) есть такие, для которых $|y|\leq 1$.

Рассмотрим функцию $f(y)=2y^2+y+2a-a^2=2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2+2a-a^2-\frac{1}{8}$. $y=-\frac{1}{4}$ – точка минимума функции $f(y)$, причём $f\left(-\frac{1}{4}\right)\leq 0$, если $D(a)\geq 0$. Корни y_1,y_2 $(y_1\leq y_2)$ уравнения $(*)$ симметричны относительно точки $y=-\frac{1}{4}$,Если $y_1\in[-1;1]$, то $y_2\in[-1;1]$. Выясним, при каких a выполняется условие $y_2\in\left[-\frac{1}{4};1\right]$. Так как $f\left(-\frac{1}{4}\right)\leq 0$ при a удовлетворяющих (2), и $f(y)$ строго возрастает при $y>-\frac{1}{4}$, то $y_2\in\left[-\frac{1}{4};1\right]$ в том и только том случае, когда $f(1)\geq 0$, то есть $3+2a-a^2\geq 0$.Это неравенство справедливо для $a\in[-1;3]$. Пересечение этого множества с множеством (2) даёт решение задачи.

Ответ: $[-1;0)\cup\left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$

7. Расстояние между городами ***A*** и ***B*** составляет 30 км. Три туриста отправились из ***A*** в ***B***. У них на троих есть 2 велосипеда: гоночный, на котором каждый из них едет со скоростью 30 км/ч, и туристический, на котором они могут перемещаться со скоростью 20 км/ч. Пешком каждый из них может идти со скоростью 6 км/ч. Любой велосипед можно оставить на дороге, где он будет лежать, пока им не сможет воспользоваться другой турист. Туристы желают добраться до ***B*** за наименьшее время, при этом время окончания путешествия соответствует моменту прибытия в В последнего из них. Чему равно это наименьшее время?

Решение

Так как каждый из туристов преодолел 30 км и по 30 км проехал каждый велосипед, то все 3 туриста в сумме прошли пешком 30 км. Следовательно, сумма промежутков времени, затраченных каждым туристом на путешествие, равна суммарному времени езды на велосипеде и пешей хотьбы и равна: 1ч+1.5ч+5ч=7.5ч. Отсюда следует, что путешествие не может продолжаться менее 2.5ч и будет равно этому времени, если туристы прибывают в конечный пункт одновременно. Покажем, что это возможно.

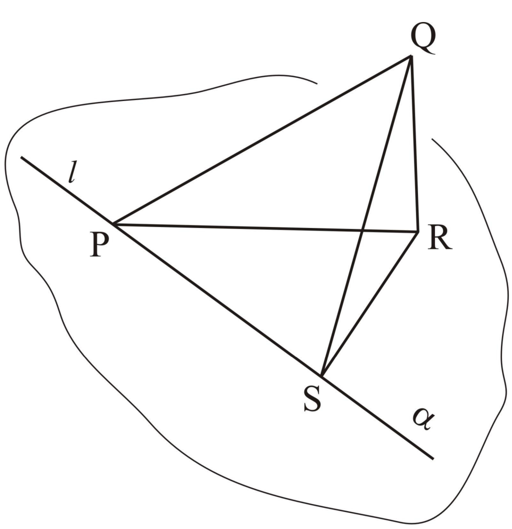
Пусть первый турист x км шёл пешком, а оставшиеся (30-x) км ехал на гоночном велосипеде; второй турист сначала проехал y км на туристическом велосипеде, а оставшиеся (30-y) км шёл пешком; третий турист x км ехал на гоночном велосипеде, затем (y-x) км шёл пешком и (30-y) км ехал на туристическом велосипеде.

Поскольку каждый турист должен затратить на путь 2,5 ч, то составим уравнения: $\frac{x}{6}+\frac{30-x}{30}=2.5$; $\frac{y}{20}+\frac{30-y}{6}=2.5$; $\frac{x}{30}+\frac{y-x}{6}+\frac{30-y}{20}=2.5$. Отсюда находим: $x=\frac{45}{4}$ (км), $y=\frac{150}{7}$ (км). Проверкой убеждаемся, что при найденных значениях x и y каждый велосипедист прибывает в то место, где он должен оставить велосипед, раньше, чем в это место приходит нужный пешеход.

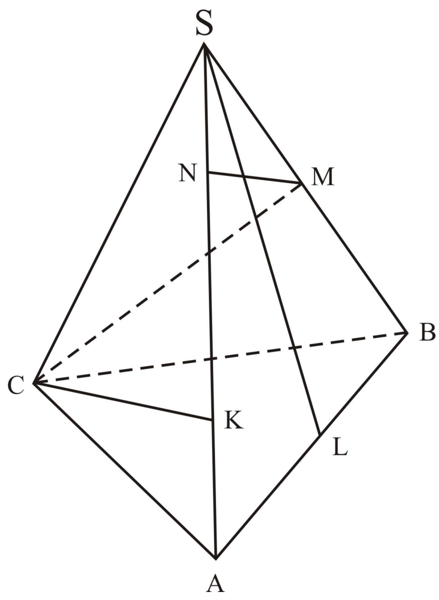
Ответ: 2.5 часа.

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны 2, боковые рёбра равны 5, точка M - середина ребра SB. Отрезок CM проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SA. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Решение



Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть в пространстве заданы некоторая прямая l, плоскость α, проходящая через l и некоторый отрезок PQ, который проектируется на α. Будем считать, что один из концов отрезка (точка P) лежит на прямой l. Из точки Q опустим перпендикуляр QR на плоскость α и перпендикуляр QS на прямую l. По теореме о трёх перпендикулярах RS тоже перпендикуляр к l. В прямоугольном



треугольнике PRS катет PS не больше гипотенузы PR, значит, длина проекции PR отрезка PQ на плоскость α не может быть меньше, чем проекция PS отрезка PQ на прямую l. Для того, чтобы эти величины совпали достаточно выбрать плоскость α так, чтобы она была перпендикулярна плоскости PQS. В этом случае QS окажется перпендикуляром к α и точки R и S совпадут.

Для нашей задачи это означает, что наименьшая величина проекции отрезка CM на плоскость, проходящую через ребро SA, равна проекции CM на прямую SA.

Опустим из точек C и M перпендикуляры CK и MN на SA.

Пусть L – середина отрезка AB, а $\beta = \angle LSB$. Тогда $\sin\beta = \frac{LB}{SB} = \frac{1}{5}$.

Имеем: $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = \frac{23}{25}$.

Из прямоугольного треугольника SMN : $SN = SM \cdot \cos 2\beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{23}{25} = \frac{23}{10}$

Из прямоугольного треугольника SCK : $SK = SC \cdot \cos 2\beta = 5 \cdot \frac{23}{25} = \frac{23}{5}$.

Теперь находим: $NK = SK - SN = \frac{23}{5} - \frac{23}{10} = \frac{23}{10}$.

Ответ: $\frac{23}{10}$.