1. На валик плотно намотали 25 м ленты толщиной в 0,1 мм. Ширина ленты равна длине валика. Диаметр валика с намотанной лентой равен 1 дм. Каков диаметр валика без ленты?

Решение

Площадь поперечного сечения валика с намотанной лентой равна $25\pi\, см^2$. Лента заполняет площадь $25\, см^2$. Следовательно, площадь поперечного сечения валика без ленты имеет площадь $25(\pi-1)см^2$. Пусть d – диаметр валика без ленты. Тогда из равенства $\pi\cdot\frac{d^2}{4}=25(\pi-1)$

найдём $d=10\cdot\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}$ (см).

Ответ: $10\cdot\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}$ **см.**

2. Пусть $p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2$ – квадраты n различных натуральных чисел. Докажите, что $\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)>\frac{1}{2}$.

Доказательство

Пусть наибольшее из данных чисел равно m. Тогда $\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)\geq\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$, так как в правую часть добавлены множители, меньшие единицы.

Вычислим правую часть неравенства, разложив каждую скобку на множители: $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

Правая часть неравенства запишется в виде:

$$\frac{(1\cdot 3)(2\cdot 4)(3\cdot 5)...((m-1)(m+1))}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot...\cdot m^2}=\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot...\cdot(m-1)^2\cdot m\cdot(m+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot...\cdot m^2}=\frac{m+1}{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

3. Докажите, что числа 1, 2, 3, …, 15 нельзя разбить на две группы: А из двух чисел и В из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе В была равна произведению чисел в группе А.

Доказательство

Предположим, что такое разбиение возможно и в А вошли числа x, y, $(x<y)$. Тогда сумма чисел в **В** равна $1+2+3+...+15-x-y=120-x-y$ и $xy=120-x-y \qquad (1)$.

Перепишем (1) в виде: $(x+1)(y+1)=121$. Из последнего равенства следует, что либо $x+1=1,\ \ y+1=121$, либо $x+1=y+1=11$, что невозможно. **Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.**

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2+xy=1 \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases}$

Решение

Пусть $z=\dfrac{3x}{(1-x)^2}$, тогда второе уравнение перепишется в виде: $z^2=2+zy$ (1). Разделив первое уравнение на x^2, получим: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=2+\dfrac{1}{x}\cdot y,\ \ x\neq 0$ (2). Вычтем (2) из (1): $\left(z-\dfrac{1}{x}\right)\left(z+\dfrac{1}{x}\right)=\left(z-\dfrac{1}{x}\right)y$, откуда либо 1) $z=\dfrac{1}{x}$, либо 2) $z+\dfrac{1}{x}=y$.

Имеем: 1) $\dfrac{3x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{x},\ 3x^2=1-2x+x^2,\ 2x^2+2x-1=0,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Теперь из первого уравнения системы получим: $\dfrac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)^2}{2}+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}y=1$. Отсюда $y=2$.

2) $xz+1=xy$. Подставляя это в первое уравнение системы, получим: $2x^2+xz+1=1,\ \ x(2x+z)=0$. Так как $x\neq 0$, то $2x+z=0,\ \ 2x+\dfrac{3x}{(1-x)^2}=0$. Последнее уравнение не имеет корней отличных от нуля.

Ответ: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ \ y=2.$

5. Решите уравнение:

$$a\cdot\sqrt{x-b^2-c^2}+b\cdot\sqrt{x-c^2-a^2}+c\cdot\sqrt{x-a^2-b^2}=a^2+b^2+c^2$$

Решение

Рассмотрим функцию $f(x)=a\cdot\sqrt{x-\left(b^2+c^2\right)}+b\cdot\sqrt{x-\left(c^2+a^2\right)}+c\cdot\sqrt{x-\left(a^2+b^2\right)}$. Она определена при $x\geq\max\left\{b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2\right\}$ и строго возрастает на всей области определения, так как является суммой трёх строго возрастающих функций.

Очевидно, что $f\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2+b^2+c^2$, то есть уравнение имеет корень $x=a^2+b^2+c^2$. В силу строгой монотонности функции $f(x)$ уравнение других корней не имеет.

Ответ: $x=a^2+b^2+c^2$**.**

6. Решите в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} x^2 = y - 1 \\ y^2 = z - 1 \\ z^2 = x - 1 \end{cases}$

Решение

Пусть x – чётно, тогда y – нечётно, а тогда z – чётно и x – нечётно. Получили противоречие.

Если x – нечётно, то рассуждая аналогично приходим к противоречию. Следовательно, система не имеет целых решений.

Ответ: целых решений нет.

7. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берёт 2 любых стакана и отливает молоко из одного стакана в другой до тех пор, пока количества молока в них не уравняются. Можно ли налить молоко в стаканы так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

Решение

Нальём в один стакан 200 г молока, а в остальные 29 стаканов нальём по 100 г молока. Тогда общее количество молока в стаканах будет равно 100·29 + 200 = 3100 (г). При разделе поровну в каждом стакане должно стать по $\frac{3100}{30} = \frac{310}{3}$ (г) молока.

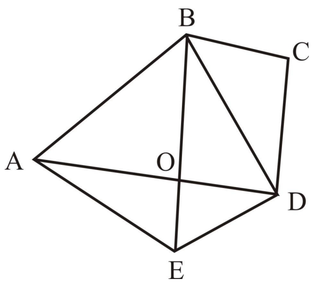
После переливания с номером n количество молока в каждом стакане, умноженное на 2^n, будет выражаться целым числом граммов, так как после однократного переливания из стакана, содержащего a граммов молока, в стакан, содержащий b граммов, в каждом стакане получится по $\frac{a+b}{2}$ граммов молока.

Если мальчик сможет разлить молоко поровну с помощью n переливаний, то число $2^n \cdot \frac{310}{3}$ должно быть целым, что невозможно ни при каком n.

Ответ: можно.

8. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ площадь каждого из треугольников ABC, BCD, CDE, DEA равна S, а площадь треугольника EAB равна $\frac{3}{2}S$. Вычислить площадь пятиугольника.

Решение



Из равенства площадей ΔABC и ΔBCD с общим основанием BC следует равенство их высот, опущенных из вершин A и D на BC. Отсюда следует, что $BC \parallel AD$. Аналогично доказывается что $CD \parallel BE$. Пусть O - точка пересечения AD и BE. Так как $OB \parallel CD$ и $BC \parallel OD$, то $OBCD$ - параллелограмм, и значит $S_{\Delta OBD} = S_{\Delta BCD} = S$. Имеем: $S_{ABCDE} = S_{\Delta AOB} + 3S$.

Рассмотрим четырёхугольник $ABDE$. $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta OAB}} = \dfrac{OE}{OB}$, так как треугольники AOE и OAB имеют общую высоту, опущенную из вершины A. Аналогично: $\dfrac{S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta OBD}} = \dfrac{OE}{OB}$. Следовательно $\dfrac{S_{\Delta AOE}}{S_{\Delta OAB}} = \dfrac{S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta OBD}}$. Отсюда $S_{\Delta OAB} \cdot S_{\Delta EOD} = S_{\Delta AOE} \cdot S_{\Delta OBD} \quad (1)$. Обозначим через x площадь треугольника AOB. Тогда $S_{\Delta AOE} = \dfrac{3}{2}S - x$. Далее имеем: $S_{\Delta DOE} = S_{DEA} - S_{\Delta AOE} = S - \left(\dfrac{3}{2}S - x\right) = x - \dfrac{S}{2}$. Теперь соотношение (1) запишется в виде: $x \cdot \left(x - \dfrac{S}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}S - x\right) \cdot S$. Отсюда найдём $x = S$. Следовательно, $S_{ABCDE} = S + 3S = 4S$.

Ответ: $4S$