1. Найти производную функции $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$

$$1)\,-4\sqrt{x}\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \quad 2)\,5x^{\frac{1}{2}}\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^5 \quad 3)\,\frac{4}{\sqrt{x}}\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \quad 4)\,-\frac{4}{\sqrt{x}}\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

Решение:

$$y'=4\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{4}{\sqrt{x}}\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

Ответ: 4)

2. Решить неравенство: $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}>\sqrt{3}$

$$1)\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{9}+\pi k\right)2)\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{9}+2\pi k\right)3)\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{12}+2\pi k\right)4)\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{5\pi}{12}+\pi k\right)k\in Z$$

Решение:

Упростим левую часть неравенства:

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Неравенство перепишется в виде: $ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{3},\ \pi k<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\pi k$

Отсюда $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$

Ответ: 4)

3. Пусть $(x_0,\ y_0)$ – решение системы уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x^2-2}=-y\\ x-1=\sqrt{y^2+2y+1}\end{cases}$

Найдите x_0+y_0.

1) – 8 2) 1 3) 5 4) – 1

Решение:

Имеем: $\begin{cases} y=-\sqrt{x^2-2} \\ |y+1|=x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y+1=1-\sqrt{x^2-2} \\ |y+1|=x-1 \end{cases}$

1) $\begin{cases} y\ge -1 \\ x-1=1-\sqrt{x^2-2} \end{cases}$ $x=\dfrac{3}{2},\ \ y=-\dfrac{1}{2}$

2) $\begin{cases} y<-1 \\ y+1=1-x \end{cases}$ $1-x=1-\sqrt{x^2-2},\quad x^2=x^2-2,$ – решений нет.

Следовательно, $x_0+y_0=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

Ответ: 2)

4. Найдите значение выражения при $x=7{,}4$, $y=8{,}7$:

$$\frac{(\sqrt[3]{\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt[3]{y}})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$$

1) 3 2) 1 3) –1 4) –2

Решение:

В числителе стоит разность кубов $\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3-\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3$, то есть $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

Следовательно, выражение равно –1 , при любых значениях *x, y*.

Ответ: 3)

5. Найдите произведение корней уравнения: $\log_{\sqrt{3}}(x-2)^4=8$

1) –3 2) 4 3) –5 4) –4

Решение:

$$(x-2)^4=3^4,\quad |x-2|=3.$$

Отсюда : $\left[\begin{array}{l} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ответ: 3)

6. При каком значении m функция $y = arctg\left(-5m + 3mx + 2x^2\right)$ имеет минимум при $x = \frac{3}{4}$?

1) –1 2)1 3) 2 4) –3

Решение:

Функция $y = arctgt$ возрастающая, имеет наименьшее значение при $t = -5m + 3mx + 2x^2$, то есть при $x = -\frac{3m}{4}$.

Следовательно, $\frac{3}{4} = -\frac{3m}{4}$.

Отсюда $m = -1$.

Ответ: 1)

7. У мальчика был один лист бумаги, который он разделил на 4 части. Четвёртую часть количества имеющихся кусков бумаги мальчик выбросил. Каждый из оставшихся кусков мальчик разделил опять на 4 части и опять выбросил четвёртую часть имеющихся кусков бумаги. Мальчик повторил такую процедуру ещё 6 раз. Сколько всего кусков бумаги мальчик выбросил?

Решение:

После деления листа бумаги на 4 части мальчик выбросил 1 кусок. Повторив процедуру, он получил 12 кусков и выбросил 3 куска. Затем он получил 36 кусков и выбросил 9 кусков. Число выброшенных кусков составляет геометрическую прогрессию:

1, 3, 9, …, b_8, знаменатель которой $q = 3$. Число выброшенных кусков бумаги – это сумма первых восьми членов геометрической прогрессии:

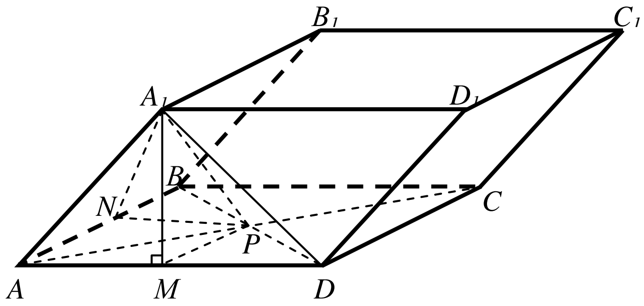
$$S_8 = \frac{1 \cdot \left(3^8 - 1\right)}{3 - 1} = 3280.$$

Ответ: 3280

8. В четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$– квадрат, все рёбра имеют одинаковую длину и угол A_1AB равен углу A_1AD, который равен 60°. Найдите величину угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

Решение:

Пусть a – длина ребра призмы. $AM = MD = \frac{a}{2}$, $N -$ середина AB.



Пусть A_1P – высота призмы. По теореме обратной теореме о трёх перпендикулярах, получаем $PM \perp AD$, $PN \perp AB$. $\Delta AA_1M = \Delta AA_1N$.

Значит $\Delta A_1MP = \Delta A_1NP \Rightarrow \Delta AMP = \Delta ANP$. Следовательно, точка P лежит на диагонали AC квадрата $ABCD$. Так как $AM = MD$, $MP \parallel DC$, то P середина AC, то есть центр квадрата $ABCD$. $AP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Угол A_1AP – искомый угол между ребром призмы и плоскостью основания. $\cos \angle A_1AP = \frac{AP}{AA_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\angle A_1AP = 45^\circ$.

Ответ: 45.