1. В арифметической прогрессии $a_6 = 160,\ a_7 = 156$. Найдите номер первого отрицательного члена этой прогрессии.

1) 42 2) 47 3) 51 4) 48

Решение:

$d = -4,\ a_1 + 5(-4) = 160, \quad a_1 = 180, \quad a_1 - 4(n-1) < 0, \quad n > 46,\ n = 47$.

Проверка: $a_{47} = 180 - 4 \cdot 46 = -4, \quad a_{46} = 0$

Ответ: 2)

2. Упростить выражение: $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}{tg^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) - ctg^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}$

1) $\sin^2 2\alpha$ 2) $\cos^2 2\alpha$ 3) $\dfrac{1}{4}\cos^2 2\alpha$ 4) $\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

Решение:

Имеем: $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

Ответ: 4)

3. При каких целых значениях параметра *c* уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} = c$ имеет хотя бы один корень? В ответе укажите интервал, содержащий все такие значения параметра.

1) (–2; 2) 2) (2; 6) 3) (6; 10) 4) (10; 15)

Решение:

ОДЗ: $x \in [2;7],\ c \geq 0.\ x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(7-x)} + 7 - x = c^2,\ 2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2 - 5,\ c^2 \geq 5$

$$4x^2 - 36x + c^4 - 10c^2 + 81 = 0.$$

Так как это уравнение должно иметь корни, то $D \geq 0$, $c^4 - 10c^2 \leq 0,\ c^2 - 10 \leq 0,\ -\sqrt{10} \leq c \leq \sqrt{10}$. Следовательно, $\sqrt{5} < c < \sqrt{10},\ c = 3$. Подставляя $c = 3$ в уравнение, найдём два корня.

Ответ: 2)

4. Решите неравенство: $x^2-8|x|+12\le 0$.

$$1)\,[-6;6]\quad 2)\,[-2;2]\quad 3)\,(-\infty;-6]\cup[2;6]\quad 4)\,[-6;-2]\cup[2;6]$$

Решение:

Имеем: $|x|^2-8|x|+12\le 0$. Корни квадратичного трёхчлена: $|x|=2,\ |x|=6$

Следовательно, $2\le|x|\le 6,\ \begin{cases}|x|\ge 2\\ |x|\le 6\end{cases}\ \begin{cases}x\le -2\cup x\ge 2\\ -6\le x\le 6\end{cases}\quad x\in[-6;-2]\cup[2;6]$

Ответ: 4)

5. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{3-4\sqrt{x}}$.

$$1)\left[0;\frac{5}{16}\right]\quad 2)\left[\frac{1}{4};\frac{9}{16}\right]\quad 3)\left[0;\frac{9}{16}\right]\quad 4)\left[0;\frac{1}{4}\right]$$

Решение:

$$\begin{cases}x\ge 0\\ 3-4\sqrt{x}\ge 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge 0\\ x\le\dfrac{9}{16}\end{cases}$$

Ответ: 3)

6. При каких значениях k число 2 находится между корнями уравнения $2x^2-\frac{1}{2}x+(k-3)(k+5)=0$, не совпадая ни с одним из них?

1) (–5; 1) 2) (–4 ; 2) 3) (0 ; 3) 4) (4 ; 8)

Решение:

Перепишем уравнение в виде: $4x^2-x+2(k^2+2k-15)=0$.

Имеем: $\dfrac{1-\sqrt{1-32(k^2+2k-15)}}{8}<2<\dfrac{1+\sqrt{1-32(k^2+2k-15)}}{8}$

$$\begin{cases}-\sqrt{481-64k-32k^2}<15\\ \sqrt{481-64k-32k^2}>15\end{cases}\qquad k^2+2k-8<0,\qquad -4<k<2$$

Ответ: 2)

7. Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая – на 35% больше, чем первая. Вспахивая с постоянной производительностью ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая бригада закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая бригада. Сколько гектаров вспахивала ежедневно первая бригада, если известно, что на выполнение своей работы она затратила меньше двух недель?

Решение:

Пусть: ***v*** *га* в день – производительность первой бригады;
(***v***+*3) га* в день – производительность второй бригады;
240 + 240·0,35 = 324 *га* – должна вспахать вторая бригада;
$\frac{240}{v}$ дней – затратила на выполнение своей работы первая бригада;
$\frac{324}{v+3}$ дней – затратила на выполнение своей работы вторая бригада.

Составим уравнение: $\frac{240}{v}+2=\frac{324}{v+3}$, $v^2-39v+360=0$, $v_1=15$, $v_2=24$.

Так как по условию задачи $\frac{240}{v}<14$, то есть $v>\frac{120}{7}$, то $v=15$ не подходит.

Ответ: 24

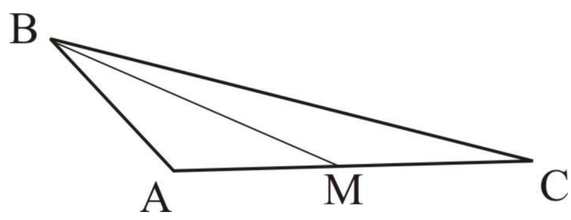
8. В треугольнике ***ABC*** сторона ***AB*** равна 10, а угол ***A*** – тупой. Найдите медиану ***BM***, если ***AC*** = 20, а площадь треугольника ***ABC*** равна 96.

Решение:

$S_{ABM}=S_{MBC}=48,$

$S_{ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot AM\cdot\sin\angle A,$

$\sin\angle A=\frac{24}{25},\quad \cos\angle A=-\frac{7}{25}.$



По теореме косинусов из треугольника ***ABM*** находим: ***BM*** = 16.

Ответ: 16.