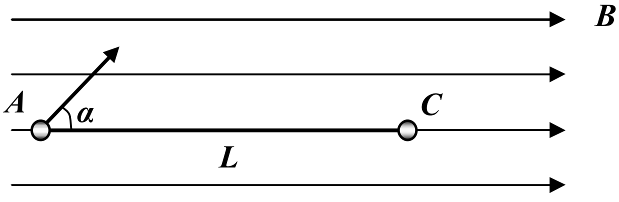
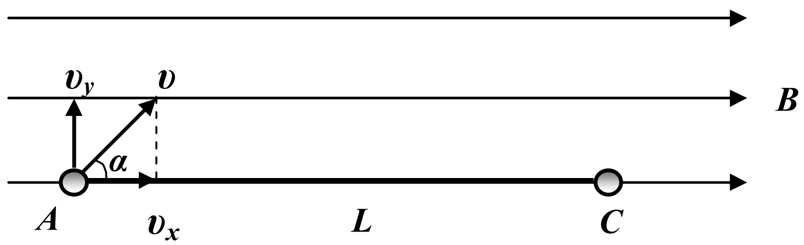
Задача № 1



Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке ***A*** его скорость ***υ*** составляет угол ***α*** с направлением поля (см. рис.). При какой индукции ***B*** электрон окажется в точке ***C*** на расстоянии ***L*** от точки ***A***? Заряд электрона ***e***, его масса ***m***.

Решение:



1) $\upsilon_x = \upsilon \cdot cos\alpha; \ \ \upsilon_y = \upsilon \cdot sin\alpha;$

2) Движение электрона по оси ***x*** происходит с постоянной скоростью ($\upsilon_x = const$). Время прохождения пути L.

3) $t = \dfrac{L}{\upsilon_x} = \dfrac{L}{\upsilon\cos\alpha}$;

4) Электрон движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.

Уравнение движения $q \cdot \upsilon_y \cdot B = \dfrac{m \cdot \upsilon_y^2}{R}$, где R – радиус окружности вращения электрона.

Выразим радиус $R = \dfrac{m\upsilon_y}{qB}$;

5) Время одного оборота равно $t_o = \dfrac{2\pi R}{\upsilon_y}$;

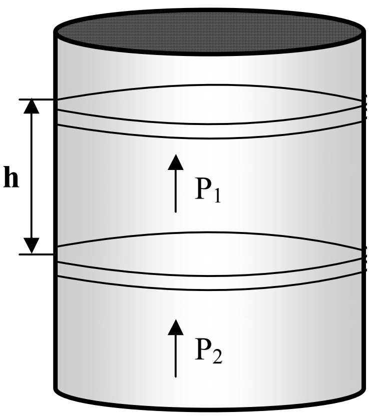
6) Приравняем $t=t_o$; $\dfrac{2\pi \cdot R}{\upsilon_y} = \dfrac{L}{\upsilon_x}$; $\dfrac{2\pi \cdot m \cdot \upsilon_y}{q \cdot B \cdot \upsilon_y} = \dfrac{L}{\upsilon_x}$; $B = \dfrac{2\pi \cdot m \cdot \upsilon_x}{q \cdot L} = \dfrac{2\pi \cdot m \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha}{q \cdot L}$.

Ответ: при индукции $B = \dfrac{2\pi \cdot m \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha}{q \cdot L}$ электрон попадает в точку ***C*** за один оборот.

Задача № 2

В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде находится тяжелый закрепленный поршень. Над поршнем вакуум, под ним воздух. Поршень освобождают, и в положении равновесия объем воздуха уменьшается вдвое. Как изменилась температура воздуха?

Решение: Обозначим: V_1 – начальный объем; V_2 – конечный объем;
P_1 – давление до опускания поршня; P_2 – после опускания поршня.



Так как процесс адиабатический, то *ΔQ = 0*.
Согласно ***I началу термодинамики***
ΔU = –ΔA, где *ΔA* – совершенная работа.
1) Изменение внутренней энергии *ΔU* выражается уравнением:
$\Delta U = \frac{5}{2}\cdot V\cdot R\cdot(T_2 - T_1)$. Воздух считаем двухатомным газом, число степеней свободы равно пяти.
2) Работа, то есть изменение потенциальной энергии груза, равна *A = mgh*.

3) Из уравнения Клапейрона-Менделеева имеем:
$P_1 \cdot 2V_2 = \nu \cdot R \cdot T_1$
$P_2 \cdot V_2 = \nu \cdot R \cdot T_2$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получаем: $\frac{2P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$.

Поскольку $P_2 = \frac{mg}{S}$ (где S – площадь цилиндра), то подставляя:

$$\frac{2\cdot P_1\cdot S}{mg} = \frac{T_1}{T_2};\quad mg = \frac{A}{h};\quad \frac{2P_1\cdot S\cdot h}{A} = \frac{T_1}{T_2}\quad \text{или}\quad \frac{P_1\cdot V_1}{A} = \frac{T_1}{T_2};\quad P_1\cdot V_1 = \nu\cdot R\cdot T_1,$$

имеем $\frac{\nu\cdot R\cdot T_1}{5/2\,\nu\cdot R\cdot(T_2 - T_1)} = \frac{T_1}{T_2}$; $\quad 2T_2 = 5T_2 - 5T_1$; $\quad T_2 = \frac{5}{3}T_1$.

Ответ: $T_2 = \frac{5}{3}T_1$.

Задача № 3

При столкновении двух частиц, движущихся навстречу друг другу, в результате слипания и последующего расщепления рождается серия новых частиц с общей массой *m*. Известно, что новые частицы разлетаются в разных направлениях, составляющих угол *α* с направлением движения одной из начальных частиц, но с одинаковой скоростью, равной скорости второй из них. Известно также, что вторая частица до столкновения имела импульс *p*. Определите наименьшую из возможных скоростей сближения сталкивающихся частиц.

Решение:

Если m_1, m_2 – массы первоначальных частиц, υ_1, υ_2 – их скорости, то $m_1 + m_2 = m$, $\upsilon_2 = \frac{P}{m_2}$.

Из закона сохранения импульса получаем $m_1\cdot\upsilon_1 - m_2\cdot\upsilon_2 = m\cdot\upsilon_2\cdot cos\alpha$. Следовательно $m_1\cdot\upsilon_1 = (m\cdot\cos\alpha + m_2)\cdot\upsilon_2$,

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = \frac{m\cdot\cos\alpha + m_2}{m_1}\cdot\frac{p}{m_2} + \frac{p}{m_2} = \frac{p\cdot m\cdot(\cos\alpha + 1)}{m_1\cdot m_2}.$$

Так как $\dfrac{1}{m_1 \cdot m_2} = \dfrac{1}{\left(m - m_2\right) \cdot m_2} = \dfrac{1}{\dfrac{m^2}{4} - \left(m_2 - \dfrac{m}{2}\right)^2} \geq \dfrac{4}{m^2}$, то наименьшее значение величины $\dfrac{1}{m_1 \cdot m_2}$ равно $\dfrac{4}{m^2}$ и достигается при $m_1 = m_2 = 0{,}5m$. Таким образом, $\left(\upsilon_1 + \upsilon_2\right)_{\min} = \dfrac{4p \cdot \left(1 + \cos\alpha\right)}{m}$.

Ответ: $\dfrac{4p \cdot \left(1 + \cos\alpha\right)}{m}$.

Задача № 4

В течение 1 минуты ракета «Булава» поднималась с ускорением $2g$. Затем двигатель выключили. Найти максимальную высоту подъема ракеты.

Решение:

1) Высота подъема h_1 с ускорением $2g$ равна $h_1 = \dfrac{at^2}{2}$, где $a = 2g$, тогда $h_1 = \dfrac{2g(60)^2}{2} = 36000$ м;

2) Высоту h_2 с выключенным двигателем найдем из закона сохранения энергии $mgh_2 = \dfrac{mV_0^2}{2}$;

$h_2 = \dfrac{V_0^2}{2g}$, где V_0- скорость ракеты после отключения двигателя $V_0 = at$,

где $a = 2g$, $V_0 = 2gt = 20 \cdot 60 = 1200$ м/с. $h_2 = \dfrac{(1200)^2}{2g} = \dfrac{1440000}{20} = 72000$ м.

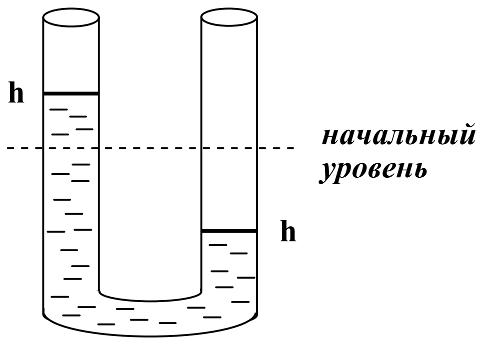
$h_{общее} = h_1 + h_2 = 36000 + 72000 = 108000$ м или 108 км.
Считаем ускорение свободного движения постоянным.

Ответ: общая высота подъема 108 км.

Задача № 5

В одно из двух колен сообщающихся сосудов опускают поршень массой 100 г. Найти, на сколько изменились уровни жидкости по отношению к начальному. Сечение сосуда 10 см^2. Плотность жидкости 1000 кг/м^3.

Решение:



Найдем h - глубину опускания жидкости или высоту ее поднятия в другом колене.

Условие равновесия после добавки груза $P = \dfrac{mg}{S} = \rho g 2h$,

где P – давление в правом колене,

тогда $h = \dfrac{m}{2\rho S} = \dfrac{0{,}1}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{1}{20}$ $м = 5$ $см$.

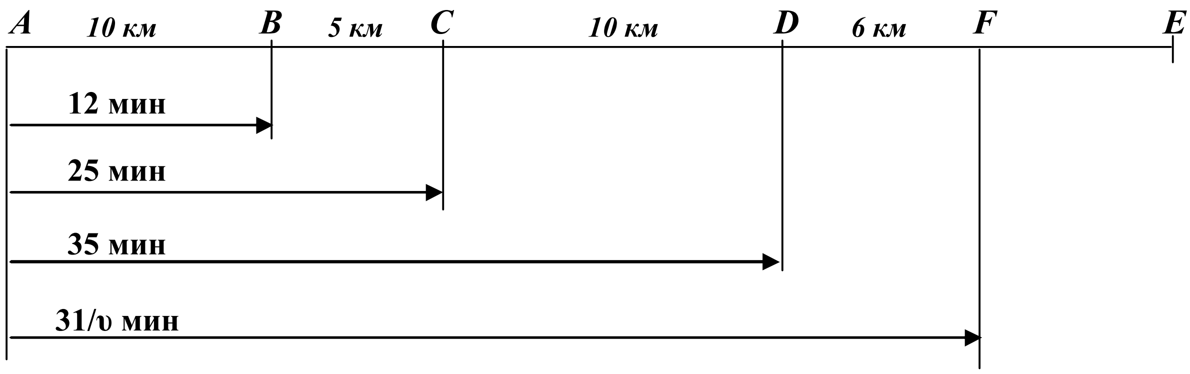
Ответ: на 5 см.

Задача № 6

Маршрут скоростного трамвая г. Волгограда состоит из четырех основных участков *AB, BC, CD, DE* длиной 10 км, 5 км, 10 км и 12 км соответственно. Согласно расписанию, выезжая из пункта *A* в 8 часов утра, трамвай проходит пункт *B* в 8 часов 12 минут, пункт *C* – в 8 часов 25 минут, пункт *D* – в 8 часов 35 минут. Определите постоянную скорость υ, с которой должен двигаться трамвай, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения трамваем пунктов *B, C, D* не превышала разности между 49,2 минутами и временем движения трамвая при скорости υ от пункта *A* до точки, находящейся на середине пути между пунктами *D* и *E*.

Решение:

Прежде всего определим из условия, что отрезки AB, AC, AD автобус проходит согласно расписанию за 12 минут, за 25 минут и за 35 минут соответственно. За единицу измерения скорости примем км/мин.



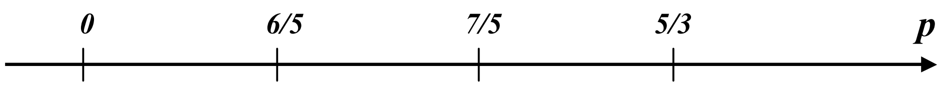
Время движения трамвая на отрезке *AB* со скоростью υ равно *10/*υ (минут), и абсолютная величина отклонения от времени, равного 12 минутам, есть: $t_1 = \left|\frac{10}{\upsilon} - 12\right|$. Аналогично, абсолютная величина времени отклонения при прохождении пункта *C*: $t_2 = \left|\frac{15}{\upsilon} - 25\right|$, абсолютная величина отклонения при прохождении пункта *D*: $t_3 = \left|\frac{25}{\upsilon} - 35\right|$. Если точка F – середина отрезка *DE*, то $|AF| = 31$ км, и время движения от *A* до *F* со скоростью υ выразится так: $t_4 = \frac{31}{\upsilon}$. Имеем, таким образом, определяющее неравенство для задачи: $\left|\frac{10}{\upsilon} - 12\right| + \left|\frac{15}{\upsilon} - 25\right| + \left|\frac{25}{\upsilon} - 35\right| \le 49{,}2 - \frac{31}{\upsilon}$ (A)

(Здесь время – в минутах, скорость – в км/мин).

Обозначим $p = \frac{1}{\upsilon}$; неравенство (А) примет вид:

$$|10p - 12| + |15p - 25| + |25p - 35| + 31p \le 49{,}2. \quad \text{(B)}$$

Отметим на числовой оси точки, в которых каждое из выражений, стоящих под знаком модуля, равно 0, и рассмотрим возможные случаи.



1) Пусть $p < 6/5$. В этом случае $10p - 12 < 0,\ \ 15p - 25 < 0,\ \ 25p - 35 < 0$, и неравенство (B) принимает вид:

$12 - 10p + 25 - 15p + 35 - 25p + 31p \le 49{,}2$.

После элементарных преобразований: $-19p \le -22{,}8$. Откуда $p \ge 6/5$.

Так как рассматривается случай $p < 6/5$, то здесь решений нет.

2) Пусть $6/5 \le p < 7/5$**.**

Тогда $10p - 12 \ge 0;\ \ 15p - 25 < 0;\ \ 25p - 35 < 0$, и неравенство (B) принимает вид:

$10p - 12 + 25 - 15p + 35 - 25p + 31p \le 49{,}2$. Откуда $p \le 6/5$. С учетом рассматриваемого случая получаем $p = 6/5$.

3) Пусть $7/5 \le p < 5/3$. Тогда $10p - 12 \ge 0$; $15p - 25 < 0;\ \ 25p - 35 \ge 0$, и действия, аналогичные предыдущим, дадут решение неравенства (B) для этого случая: $p \le 356/255$. Следует определить теперь, как расположены на числовой оси множества $7/5 \le p < 5/3$ и $p \le 356/255$.

Приведем число $7/5$ к знаменателю 255: $\dfrac{7}{5} = \dfrac{7 \cdot 51}{5 \cdot 51} = \dfrac{357}{255} > \dfrac{356}{255}$.

Получили, что множества $7/5 \le p < 5/3$ и $p \le 356/255$ не имеют общих точек; значит, этот случай решения задачи не даст.

4) Пусть $p \ge 5/3$. Тогда, аналогично предыдущим случаям, получим: $p \le 202/135$. Сравним числа 202/135 и 5/3:

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 45}{3 \cdot 45} = \frac{225}{135}.$$

Получили, что множества $p \le 202/135$ и $p \ge 225/135$ не имеют общих точек, и в этом случае решения также нет.

Итого, получаем решение: $p = 6/5$, тогда $\upsilon = 1/p = 5/6$ *(км/мин)* $= 50$ *(км/час)*.

Ответ: $\upsilon = 50$ км/час.