Задача № 1

Два гоночных автомобиля одновременно начали двигаться с нулевой начальной скоростью. Ускорение первого автомобиля менялось по закону $a_1 = a_0\left(2 - \frac{t}{t_1} + 2\frac{t^2}{t_1^2}\right)$, а у второго – $a_2 = a_0\left(2\frac{t^2}{t_1^2} - \frac{t}{t_1}\right)$. В момент времени t_1 скорость первого автомобиля перестала меняться, а второй продолжил разгоняться с постоянным ускорением, до тех пор, пока скорости автомобилей не сравнялись. Какое расстояние станет между автомобилями к этому моменту времени?

Решение:

Относительное ускорение автомобилей до момента времени t_1 равно $a_{\text{отн}_1} = 2a_0$. К этому моменту времени первый автомобиль удаляется от второго со скоростью $\upsilon_{\text{отн}} = 2a_0 t_1$. Расстояние между автомобилями к этому моменту времени равно $s_1 = a_0 t_1^2$. Ускорение второго автомобиля после момента времени t_1 равно $a_2 = a_0$. Найдем момент времени, когда их скорости сравняются $a_0(t_2 - t_1) = 2a_0 t_1$ или $t_2 = 3t_1$. К этому моменту времени расстояние между автомобилями составит $s = s_1 + \upsilon_{\text{отн}}(t_2 - t_1) - \frac{a_2(t_2 - t_1)^2}{2} = 3a_0 t_1^2$.

Ответ: $s = s_1 + \upsilon_{\text{отн}}(t_2 - t_1) - \frac{a_2(t_2 - t_1)^2}{2} = 3a_0 t_1^2$.

Задача № 2

К источнику постоянного напряжения подключили некоторое сопротивление R и сопротивление $R_1 = 1$ Ом. При этом на сопротивлении R_1 выделяется мощность $N_0 = 16$ Вт. Если сопротивление R_1 поменять на сопротивление $R_2 = 9$ Ом, то на нем будет выделяться такая же мощность. Какая мощность будет выделяться на сопротивлении $R_3 = 5$ Ом при замене сопротивления R_2 на R_3?

Решение:

$$N_0 = \frac{E^2 R_1}{(R + R_1)^2} = \frac{E^2 R_2}{(R + R_2)^2}, \quad R = \sqrt{R_1 R_2},$$

$$N = \frac{E^2 R_3}{\left(\sqrt{R_1 R_2} + R_3\right)^2} = \frac{E^2 R_1 R_3 \left(\sqrt{R_1 R_2} + R_1\right)^2}{R_1\left(\sqrt{R_1 R_2} + R_3\right)^2\left(\sqrt{R_1 R_2} + R_1\right)^2} = \frac{N_0 R_3\left(\sqrt{R_1 R_2} + R_1\right)^2}{R_1\left(\sqrt{R_1 R_2} + R_3\right)^2} = 20 \text{ Вт}.$$

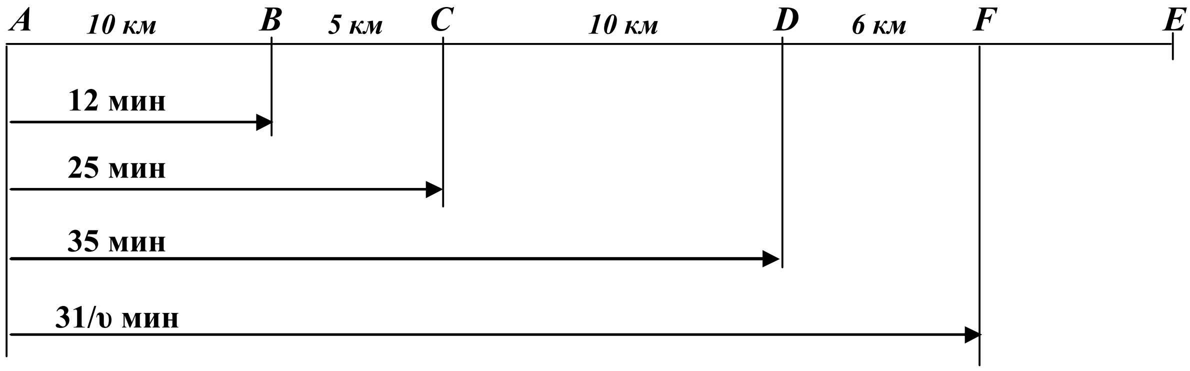
Ответ: **20 Вт.**

Задача № 3

Маршрут скоростного трамвая г. Волгограда состоит из четырех основных участков *AB, BC, CD, DE* длиной 10 км, 5 км, 10 км и 12 км соответственно. Согласно расписанию, выезжая из пункта *A* в 8 часов утра, трамвай проходит пункт *B* в 8 часов 12 минут, пункт *C* – в 8 часов 25 минут, пункт *D* – в 8 часов 35 минут. Определите постоянную скорость υ, с которой должен двигаться трамвай, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения трамваем пунктов *B, C, D* не превышала разности между 49,2 минутами и временем движения трамвая при скорости *υ* от пункта *A* до точки, находящейся на середине пути между пунктами *D* и *E*.

Решение:

Прежде всего определим из условия, что отрезки AB, AC, AD автобус проходит согласно расписанию за 12 минут, за 25 минут и за 35 минут соответственно. За единицу измерения скорости примем км/мин.



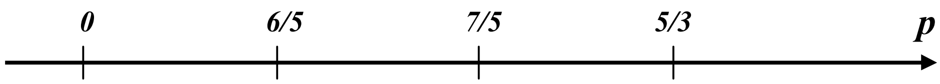
Время движения трамвая на отрезке *AB* со скоростью *υ* равно *10/υ* (минут), и абсолютная величина отклонения от времени, равного 12 минутам, есть: $t_1 = \left|\frac{10}{\upsilon} - 12\right|$. Аналогично, абсолютная величина времени отклонения при прохождении пункта *C*: $t_2 = \left|\frac{15}{\upsilon} - 25\right|$, абсолютная величина отклонения при прохождении пункта *D*: $t_3 = \left|\frac{25}{\upsilon} - 35\right|$. Если точка F – середина отрезка *DE*, то $|AF| = 31$ км, и время движения от *A* до *F* со скоростью υ выразится так: $t_4 = \frac{31}{\upsilon}$. Имеем, таким образом, определяющее неравенство для задачи: $\left|\frac{10}{\upsilon} - 12\right| + \left|\frac{15}{\upsilon} - 25\right| + \left|\frac{25}{\upsilon} - 35\right| \le 49{,}2 - \frac{31}{\upsilon}$ (A)

(Здесь время – в минутах, скорость – в км/мин).

Обозначим $p = \frac{1}{\upsilon}$; неравенство (A) примет вид:

$$|10p - 12| + |15p - 25| + |25p - 35| + 31p \le 49{,}2 . \quad \text{(B)}$$

Отметим на числовой оси точки, в которых каждое из выражений, стоящих под знаком модуля, равно 0, и рассмотрим возможные случаи.



1) Пусть $p < 6/5$. В этом случае $10p - 12 < 0$, $15p - 25 < 0$, $25p - 35 < 0$, и неравенство (В) принимает вид:

$12 - 10p + 25 - 15p + 35 - 25p + 31p \le 49{,}2$.

После элементарных преобразований: $-19p \le -22{,}8$. Откуда $p \ge 6/5$.

Так как рассматривается случай $p < 6/5$, то здесь решений нет.

2) Пусть $6/5 \le p < 7/5$.

Тогда $10p - 12 \ge 0$; $15p - 25 < 0$; $25p - 35 < 0$, и неравенство (В) принимает вид:

$10p - 12 + 25 - 15p + 35 - 25p + 31p \le 49{,}2$. Откуда $p \le 6/5$.

С учетом рассматриваемого случая получаем $p = 6/5$.

3) Пусть $7/5 \le p < 5/3$. Тогда $10p - 12 \ge 0$; $15p - 25 < 0$; $25p - 35 \ge 0$, и действия, аналогичные предыдущим, дадут решение неравенства (В) для этого случая: $p \le 356/255$. Следует определить теперь, как расположены на числовой оси множества $7/5 \le p < 5/3$ и $p \le 356/255$.

Приведем число $7/5$ к знаменателю 255: $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 51}{5 \cdot 51} = \frac{357}{255} > \frac{356}{255}$.

Получили, что множества $7/5 \le p < 5/3$ и $p \le 356/255$ не имеют общих точек; значит, этот случай решения задачи не даст.

4) Пусть $p \ge 5/3$. Тогда, аналогично предыдущим случаям, получим: $p \le 202/135$. Сравним числа $202/135$ и $5/3$:

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 45}{3 \cdot 45} = \frac{225}{135}.$$

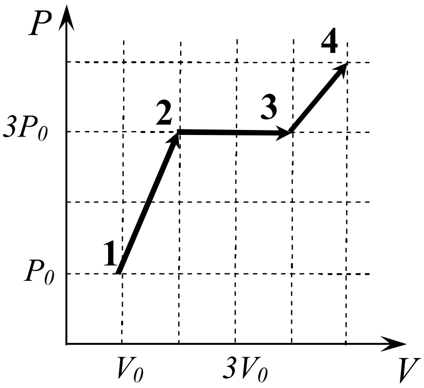
Получили, что множества $p \le 202/135$ и $p \ge 225/135$ не имеют общих точек, и в этом случае решения также нет.

Итого, получаем решение: $p = 6/5$, тогда $\upsilon = 1/p = 5/6$ *(км/мин)* $= 50$ *(км/час)*.

Ответ: $\upsilon = 50$ км/час.

Задача № 4

Один моль одноатомного идеального газа совершает процесс *1→2→3→4*, изображенный на рисунке. Найдите работу в процессе *1→2→3→4*.



Решение:

$$A = \frac{P_0 + 3P_0}{2} 3V_0 + \frac{3P_0 + 4P_0}{2} V_0 = 9{,}5 P_0 V_0.$$

Ответ: $9{,}5 P_0 V_0$.

Задача № 5

Бруску, стоявшему у основания наклонной плоскости, сообщили скорость, направленную вдоль наклонной плоскости. При этом время подъема оказалось в полтора раза меньше времени спуска. Каков коэффициент трения бруска о наклонную плоскость. Угол наклона плоскости 45°.

Решение:

Из второго закона Ньютона ускорения бруска при движении вверх и вниз равны соответственно $a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ и $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Путь вверх и вниз равен $S = a_1 \frac{\tau_1^2}{2} = a_2 \frac{\tau_2^2}{2}$, тогда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$ или $\mu = \frac{(\tau_2^2 - \tau_1^2)\sin\alpha}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)\cos\alpha} = \frac{1{,}5^2 - 1}{1{,}5^2 + 1} = 0{,}38$.

Ответ: 0,38.

Задача № 6

Дрожжевые грибки при благоприятных условиях размножаются с большой скоростью, увеличиваясь в объеме в 2 раза за каждую минуту. В колбу поместили 1 гриб, который заполнил ее за 30 минут. За сколько минут заполнят колбу помещенные в нее два гриба?

Решение: Через 30 минут объем грибов был бы равен удвоенному объему колбы, следовательно, объем колбы был достигнут за минуту до этого, то есть через 29 минут.

Ответ: 29 минут.