Решение заданий заключительного этапа
Волгоградской олимпиады школьников “Политехник”

Математика **11 касс**

1. Имеем: $\dfrac{\log_6 324}{\log_4 6}=\dfrac{\log_6(4.81)}{\log_4 6}=\log_6 4(\log_6 4+2\log_6 9)$. Заданное число:

$$\log_6^2 9+\frac{\log_6 324}{\log_4 6}=\log_6^2 9+\log_6^2 4+2\log_6 9\cdot\log_6 4=(\log_6 9+\log_6 4)^2=\log_6^2 36=2^2=4$$

Ответ: 4.

2. Пусть $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$. Функция $g(y)=y^3+2y$ - возрастающая и нечётная. Из равенств: $g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$ и $g(\beta-1)=f(\beta)-3=2$ следует, что $\alpha-1=-(\beta-1)$. Поэтому $\alpha+\beta=2$.

Ответ: 2.

3. ОДЗ: $x\neq 0$. Так как функции чётные, то достаточно рассмотреть случай $x>0$.

$\begin{cases} x>0 \\ \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2(3-2x)\end{cases}$ $x=1$ – корень уравнения. Функция $f(x)=x^2(3-2x)$ возрастает на интервале (0;1) и убывает при x>1, а функция $g(x)=\log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ возрастает при $x>0$. Так как $f(1)=g(1)$, то x=1 – единственный корень уравнения при x>0, а тогда $x=-1$ - тоже корень исходного уравнения.

Ответ: -1; 1.

4. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 1+\sin x\geq 0 \\ \cos x>0 \\ \sqrt{1+\sin x}=\cos x\end{cases}\rightarrow\begin{cases} \sin x\geq -1 \\ \cos x>0 \\ 1+\sin x=\cos^2 x\end{cases}\rightarrow\begin{cases} \cos x>0 \\ \sin^2 x+\sin x=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} \cos x>0 \\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0 \\ \sin x=-1\end{array}\right.\end{cases}\quad x=2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $2\pi n,\ n\in Z$.

5. Пусть a, b, c - стороны треугольника, а C - угол, противолежащий стороне c. По теореме косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. Из условия: $c^2=a^2-ab+b^2$. Отсюда находим: $a^2-ab+b^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow 2ab\cos C-ab=0\Rightarrow ab(2\cos C-1)=0$.

Так как $ab\neq 0$, то $2\cos C-1=0\Rightarrow\cos C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=60^\circ$.

Ответ: 60°.

6. Подкоренное выражение $t=8-px-8x^2$ - квадратный трёхчлен с отрицательным коэффициентом при x^2. Он имеет максимум в точке $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{p}{16}$. Так как функция $y=\sqrt[3]{t}$ возрастающая, то наибольшему значению подкоренного выражения соответствует наибольшее значение функции. Получаем: $-\dfrac{p}{16}=1.75\Rightarrow p=-28$.

Ответ: -28.

7. x - количество дней, в течение которых бригада должна работать по плану.

$\dfrac{3800}{x}$ - количество центнеров рыбы должна вылавливать бригада в день.

$\left(\dfrac{3800}{x}-20\right)$ - количество центнеров рыбы в день вылавливала бригада в шторм.

$\left(\dfrac{3800}{x}+20\right)$ - количество центнеров рыбы в день вылавливала бригада после шторма.

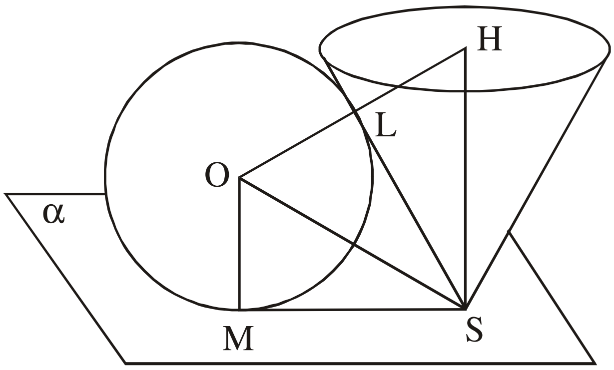
$\dfrac{2}{3}x\left(\dfrac{3800}{x}-20\right)+\left(\dfrac{3800}{x}+20\right)\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$ - количество центнеров рыбы выловила бригада всего.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2}{3}x\left(\dfrac{3800}{x}-20\right)+\left(\dfrac{3800}{x}+20\right)\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$. Имеем:

$f(x)=3780-\dfrac{20x}{3}-\dfrac{3800}{x}$, $f'(x)=-\dfrac{20}{3}+\dfrac{3800}{x^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x^2=570\Rightarrow x=\sqrt{570}$. Так как при переходе через точку $x=\sqrt{570}$ производная меняет знак с «+» на «-«, то $x=\sqrt{570}$ - точка максимума функции $f(\sqrt{570})=\dfrac{215460-760\sqrt{570}}{57}$

Ответ: $\dfrac{215460-760\sqrt{570}}{57}$ **ц.**

8. Дано: $OM=3,\ MS=4,\ SH\perp\alpha$.
Найти: SH.
Обозначим: $LH=x,\ \angle MSO=\angle OSL=\beta$.



ΔLSH : $SH=\dfrac{x}{\sin\angle HSL}$.

$\sin(\angle HSL)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta\right)=\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$

.

ΔOMS : $SO=\sqrt{3^2+4^2}=5\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{4}{5}\Rightarrow$

$\sin(\angle HSL)=2\cdot\dfrac{16}{25}-1=\dfrac{7}{25}\Rightarrow SH=\dfrac{25}{7}x.$

ΔLSH : $SH^2=LH^2+SL^2\Rightarrow\left(\dfrac{25}{7}x\right)^2=x^2+16\Rightarrow x=\dfrac{7}{6}\Rightarrow SH=\dfrac{25}{7}\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{25}{6}$

Ответ: $\dfrac{25}{6}$ **.**