

1. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$ — ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на p процентов. Определите исходное процентное содержание соли.

Решение

Пусть x — количество раствора в колбе, y — процентное содержание соли в растворе.

Тогда $\frac{x}{100} \cdot y$ — количество соли в колбе.

В пробирку отливают раствор в количестве $\frac{x}{n}$. При выпаривании количество соли в пробирке остается неизменным, а количество раствора уменьшится вдвое. Поэтому после переливания раствора обратно в колбу в ней будет то же количество соли, что и раньше, но количество раствора уменьшится на $\frac{x}{2n}$.

В результате получаем уравнение $\frac{x \cdot \frac{y}{100}}{x - \frac{x}{2n}} = \frac{y+p}{100}$, откуда находим: $y = (2n-1) \cdot p$.

Ответ: $(2n-1) \cdot p$.

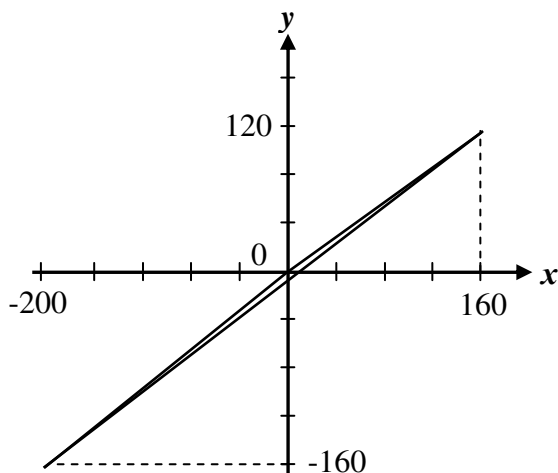
2. Вдоль шоссе для создания лесополосы выделен участок, координаты которого в декартовой системе удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x \geq 4y, \\ 4x \geq 5y, \\ 7x - 9y \leq 40. \end{cases}$$

В каждой точке (x, y) с целыми координатами этого участка предполагается посадить дерево. Определите количество деревьев, которое потребуется для этого.

Решение

Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе, то получим треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(-200; -160)$, $B(160; 120)$.



Таким образом, становится очевидным, что решить задачу непосредственным подсчетом числа точек с целыми координатами, попавшими в область, практически невозможно. Выберем другой путь.

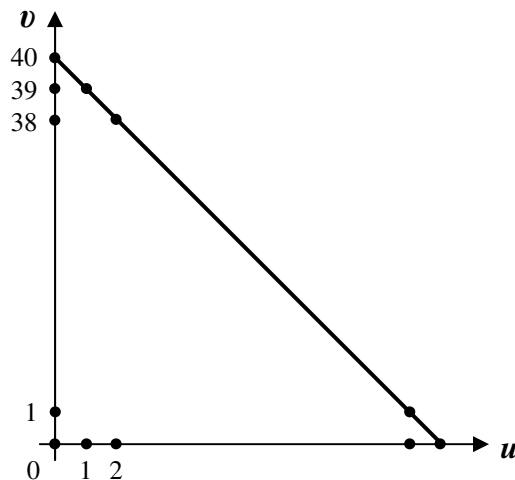
Введем новые переменные u и v , положив:
$$\begin{cases} u = 3x - 4y, \\ v = 4x - 5y. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x и y , получаем:
$$\begin{cases} x = 4v - 5u, \\ y = 3v - 4u. \end{cases}$$

Заметим, что при указанных преобразованиях каждой паре целых чисел (x, y) соответствует пара целых чисел (u, v) и наоборот, каждой паре целых чисел (u, v) отвечает пара целых чисел (x, y) . В новых координатах u, v система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ u + v \leq 40. \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти количество пар целых чисел (u, v) , удовлетворяющих последней системе. Легко видеть, что эта система в плоскости Ouv определяет треугольник, изображенный на рисунке:



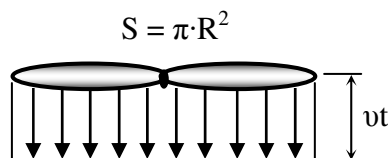
Количество точек с целыми координатами, лежащими внутри, а также на границе треугольника, найдем, используя формулу для суммы n членов арифметической прогрессии. В результате получим:

$$S = 1 + 2 + \dots + 40 + 41 = \frac{1+41}{2} \cdot 41 = 861.$$

Ответ: 861.

3. Подъемная сила вертолета 10^4 Н. В результате ремонта неисправного винта, длины лопастей его сократились на 10%. Какова новая подъемная сила?

Решение



По второму закону Ньютона импульс силы вертолета $F \cdot t$ за время t (где F – подъемная сила) равен импульсу отбрасываемого воздуха $m \cdot v$. Масса движущегося вниз воздуха за время t равна:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot v \cdot t, \text{ где } v \text{ – скорость движения воздуха, } \rho \text{ – плотность, } S = \pi \cdot R^2.$$

$$F \cdot t = \rho \cdot S \cdot v \cdot t \cdot v; \quad F = \rho \cdot S \cdot v^2.$$

Таким образом, сила пропорциональна площади винта $F \sim S \sim \pi \cdot R^2$.

$$F_1 = \frac{\rho \cdot v \cdot t \cdot R^2 \cdot v \cdot \pi}{t} = \rho \cdot v^2 \cdot R^2 \cdot \pi.$$

При прочих равных условиях:

$$F_1 \sim R_1^2$$

$$F_2 \sim R_2^2$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot R_2^2}{R_1^2} = 0,81F_1.$$

4. Стальной бензобак автомобиля емкостью 70 л полностью заполнен бензином при температуре 20 °С. После прогрева на солнце бак разогрелся до 50 °С. Сколько бензина вылилось из бака? Коэффициент объемного расширения бензина 10^{-3} K^{-1} , коэффициент линейного расширения стали $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Решение

Коэффициент объемного расширения стали в 3 раза больше коэффициента линейного расширения: $\beta_{\text{ст}} = 3 \alpha_{\text{ст}}$. Температура бака изменилась на: $\Delta t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$.

Общая формула для объема нагретого тела на Δt : $V_1 = V_0(1 + \beta_0 \cdot \Delta t)$;

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = V_0 \cdot \beta_0 \cdot \Delta t;$$

$$\Delta V_2 = V_2 - V_0 = V_0 \cdot \beta_{\text{ст}} \cdot \Delta t.$$

Вылился объем бензина, равный $\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = V_0 \cdot \Delta t(\beta_0 - \beta_{\text{ст}}) \approx 2$ литра.

Ответ: 2 л.

5. Если бы все линейные размеры Солнечной системы были пропорционально сокращены так, чтобы среднее расстояние между Солнцем и Землей уменьшилось в миллион раз, то какова была бы продолжительность одного года? Плотность небесных тел остается постоянной.

Решение

Воспользуемся вторым законом Ньютона для движения Земли вокруг Солнца:

$$\gamma \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \omega^2 \cdot R; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Из последнего уравнения выражаем период:

$$\gamma \cdot M = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{\gamma \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho}.$$

$$T \sim \sqrt[2]{\frac{R^3}{r^3 \cdot \rho}};$$

если $\rho = \text{const}$, то $T = \text{const}$; $\frac{R^3}{r^3} = \text{const}$.

Ответ: период обращения Земли останется неизменным, равным одному году.

6. Четыре одинаковых источника питания с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом соединены, как показано на рисунке. Найти разность потенциалов между точками 1–2 и 1–3.

Решение

Из уравнения закона Ома для замкнутой цепи

$$\text{найдем ток: } I = \frac{4\varepsilon}{4r} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Воспользовавшись законом Ома для участка

неоднородной цепи, определим разность потенциалов $\Delta\varphi$:

$$I \cdot R = \Delta\varphi + \varepsilon; \quad I \cdot r = \Delta\varphi + \varepsilon.$$

Откуда $\Delta\varphi$ между любыми двумя точками равна:

$$\Delta\varphi = I \cdot r - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{r} \cdot r - \varepsilon = 0 \text{ В.}$$

Ответ: 0 В.

