1. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$ – ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на *p* процентов. Определите исходное процентное содержание соли.

Решение

Пусть *x* – количество раствора в колбе, *y* – процентное содержание соли в растворе. Тогда $\frac{x}{100}\cdot y$ – количество соли в колбе.

В пробирку отливают раствор в количестве $\frac{x}{n}$. При выпаривании количество соли в пробирке остается неизменным, а количество раствора уменьшится вдвое. Поэтому после переливания раствора обратно в колбу в ней будет то же количество соли, что и раньше, но количество раствора уменьшится на $\frac{x}{2n}$.

В результате получаем уравнение $\dfrac{x\cdot\dfrac{y}{100}}{x-\dfrac{x}{2n}}=\dfrac{y+p}{100}$, откуда находим: $y=(2n-1)\cdot p$.

Ответ: $(2n-1)\cdot p$.

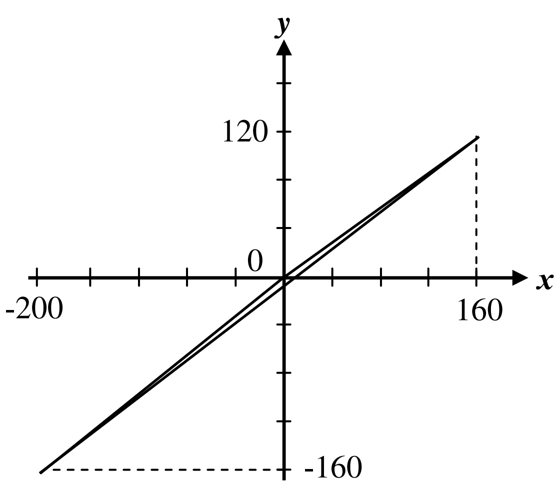
2. Вдоль шоссе для создания лесополосы выделен участок, координаты которого в декартовой системе удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}3x\ge 4y,\\ 4x\ge 5y,\\ 7x-9y\le 40.\end{cases}$$

В каждой точке (*x*, *y*) с целыми координатами этого участка предполагается посадить дерево. Определите количество деревьев, которое потребуется для этого.

Решение

Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе, то получим треугольник с вершинами O (0; 0), A (-200; -160), B (160; 120).



Таким образом, становится очевидным, что решить задачу непосредственным подсчетом числа точек с целыми координатами, попавшими в область, практически невозможно. Выберем другой путь.

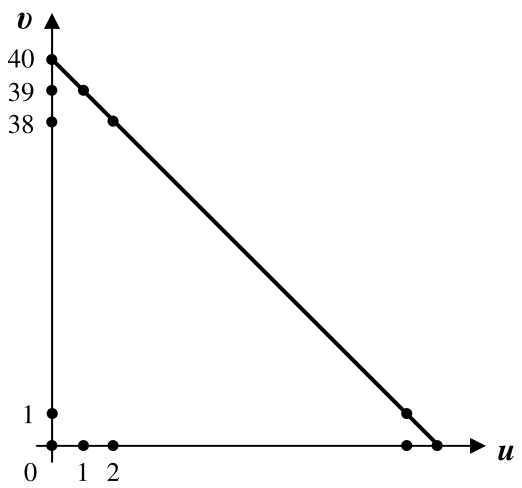
Введем новые переменные u и υ, положив: $\begin{cases} u = 3x - 4y, \\ \upsilon = 4x - 5y. \end{cases}$

Решив эту систему относительно x и y, получаем: $\begin{cases} x = 4\upsilon - 5u, \\ y = 3\upsilon - 4u. \end{cases}$

Заметим, что при указанных преобразованиях каждой паре целых чисел (x, y) соответствует пара целых чисел (u, υ) и наоборот, каждой паре целых чисел (u, υ) отвечает пара целых чисел (x, y). В новых координатах u, υ система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ \upsilon \geq 0, \\ u + \upsilon \leq 40. \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти количество пар целых чисел (u, υ), удовлетворяющих последней системе. Легко видеть, что эта система в плоскости $Ou\upsilon$ определяет треугольник, изображенный на рисунке:



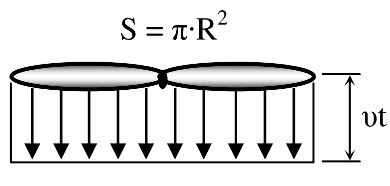
Количество точек с целыми координатами, лежащими внутри, а также на границе треугольника, найдем, используя формулу для суммы n членов арифметической прогрессии. В результате получим:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 40 + 41 = \frac{1+41}{2} \cdot 41 = 861.$$

Ответ: 861.

3. Подъемная сила вертолета 10^4 Н. В результате ремонта неисправного винта, длины лопастей его сократились на 10 %. Какова новая подъемная сила?

Решение



По второму закону Ньютона импульс силы вертолета F·t за время t (где F – подъемная сила) равен импульсу отбрасываемого воздуха m·υ. Масса двигающегося вниз воздуха за время t равна:

$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot \upsilon \cdot t$, где υ – скорость движения воздуха, ρ – плотность, $S = \pi \cdot R^2$.

$F \cdot t = \rho \cdot S \cdot \upsilon \cdot t \cdot \upsilon$; $F = \rho \cdot S \cdot \upsilon^2$.

Таким образом, сила пропорциональна площади винта $F \sim S \sim \pi \cdot R^2$.

$$F_1 = \frac{\rho \cdot \upsilon \cdot t \cdot R^2 \cdot \upsilon \cdot \pi}{t} = \rho \cdot \upsilon^2 \cdot R^2 \cdot \pi.$$

При прочих равных условиях:

$F_1 \sim R_1^2$

$F_2 \sim R_2^2$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot R_2}{R_1} = 0{,}81 F_1.$$

4. Стальной бензобак автомобиля емкостью 70 л полностью заполнен бензином при температуре 20 °С. После прогрева на солнце бак разогрелся до 50 °С. Сколько бензина вылилось из бака? Коэффициент объемного расширения бензина 10^{-3} К$^{-1}$, коэффициент линейного расширения стали $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение

Коэффициент объемного расширения стали в 3 раза больше коэффициента линейного расширения: $\beta_{ст} = 3\alpha_{ст}$. Температура бака изменилась на: $\Delta t = 30$ °С.

Общая формула для объема нагретого тела на Δt: $V_1 = V_0(1 + \beta_0 \cdot \Delta t)$;

$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = V_0 \cdot \beta_б \cdot \Delta t$;

$\Delta V_2 = V_2 - V_0 = V_0 \cdot \beta_{ст} \cdot \Delta t$.

Вылился объем бензина, равный $\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = V_0 \cdot \Delta t(\beta_б - \beta_{ст}) \approx 2$ литра.

Ответ: 2 л.

5. Если бы все линейные размеры Солнечной системы были пропорционально сокращены так, чтобы среднее расстояние между Солнцем и Землей уменьшилось в миллион раз, то какова была бы продолжительность одного года? Плотность небесных тел остается постоянной.

Решение

Воспользуемся вторым законом Ньютона для движения Земли вокруг Солнца:

$$\gamma \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \omega^2 \cdot R; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Из последнего уравнения выражаем период:

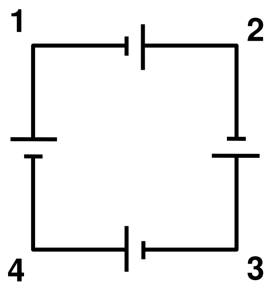
$$\gamma \cdot M = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{\gamma \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho}.$$

$$T \sim \sqrt[2]{\frac{R^3}{r^3 \cdot \rho}};$$

если $\rho = \text{const}$, то $T = \text{const}$; $\frac{R^3}{r^3} = \text{const}$.

Ответ: период обращения Земли останется неизменным, равным одному году.

6. Четыре одинаковых источника питания с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом соединены, как показано на рисунке. Найти разность потенциалов между точками 1–2 и 1–3.



Решение

Из уравнения закона Ома для замкнутой цепи

найдем ток: $I = \frac{4\varepsilon}{4r} = \frac{\varepsilon}{r}$.

Воспользовавшись законом Ома для участка

неоднородной цепи, определим разность потенциалов $\Delta\varphi$:

$I \cdot R = \Delta\varphi + \varepsilon$; $I \cdot r = \Delta\varphi + \varepsilon$.

Откуда $\Delta\varphi$ между любыми двумя точками равна:

$$\Delta\varphi = I \cdot r - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{r} \cdot r - \varepsilon = 0 \text{ В}.$$

Ответ: 0 В.